

# Wavelet-Methoden zur Analyse mammographischer Bilddaten

*Peter Heinlein*





Lehrstuhl für Dynamische Systeme  
an der Technischen Universität München

# Wavelet-Methoden zur Analyse mammographischer Bilddaten

*Peter Heinlein*

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. P. Gritzmann

Prüfer der Dissertation:

1. apl. Prof. Dr. G. Schlichting
2. Univ.-Prof. Dr. R. Lasser

Die Dissertation wurde am 29.11.2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 17.07.2001 angenommen.



# Einführung

In dieser Arbeit wird eine Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation entwickelt, welche speziell an die Problemstellung der Bildanalyse angepasst ist. Über die Eigenschaften dieser Konstruktion werden neue Resultate für eine Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten gewonnen. Die praktische Verwendbarkeit dieser Diskretisierung wird an einem konkreten Anwendungsbeispiel aus der medizinischen Bildverarbeitung, der digitalen Mammographie, demonstriert. Die dabei erzielten Resultate übertreffen bekannte Arbeiten auf diesem Gebiet.

## Wavelet-Analysis

Die Wavelet-Analysis ist eine Methode zur Signaldarstellung, die in den letzten Jahren in der Mathematik, der Physik und den Ingenieurwissenschaften populär wurde. Die der Wavelet-Theorie zugrunde liegenden Ideen sind jedoch nicht neu. Ihre besondere Leistung besteht darin, dass sie aus verschiedenen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen bekannte Ansätze in einer einheitlichen Sprache zusammenfasst.

Die Wavelet-Analyse basiert auf einer Integraltransformation, als Wavelet-Transformation bekannt. Allerdings gibt es nicht eine, sondern eine Vielzahl verschiedener kontinuierlicher und diskreter Wavelet-Transformationen. Ihnen gemeinsam ist die Grundidee, Funktionen  $f$  durch Vergleich mit einem Funktionensystem  $(\psi_g)_{g \in G}$  zu analysieren, wobei diesem Funktionensystem eine Struktur zugrunde liegt: Alle Elemente gehen durch gewisse Gruppenoperationen aus einem Erzeugenden  $\psi$ , dem Wavelet, hervor. Weiter kann die Funktion  $f$  aus den Koeffizienten  $\langle f, \psi_g \rangle$  stabil rekonstruiert werden. Für die kontinuierliche Wavelet-Transformation über einer lokalkompakten Gruppe  $G$  lässt sich dies schreiben als

$$f = \int_G \langle f, \psi_g \rangle \psi_g d\mu_G.$$

Zur Motivation der in dieser Arbeit entwickelten Diskretisierung werfen wir einen Blick zurück auf die Entwicklung der Wavelet-Theorie. Ihren Ursprung finden Wavelets bei J.-P. Morlet, der affine Wavelets zur Analyse seismischer Daten einsetzte. Obwohl A. Grossman, J. Morlet und T. Paul [GM84] früh erkannt haben, dass den Wavelets eine Gruppenstruktur zugrunde liegt, wurde diese Richtung nicht weiter verfolgt. Grund dafür war ein anderer Trend, die Multiskalenanalyse, der das Geschehen in den nächsten Jahren dominierte. Y. Meyer und S. Mallat [MH92] erkannten, dass Orthonormalbasen aus Wavelets

konstruiert werden können, I. Daubechies [Dau92] konnte sogar Beispiele mit kompaktem Träger entwickeln. Wavelets werden hier, aus dem Blickwinkel der Approximationstheorie, als Basistransformation betrachtet. Ein schneller Algorithmus brachte den Durchbruch für die praktische Anwendung auf eindimensionale Signale in der digitalen Signalverarbeitung wie z. B. der Nachrichtentechnik.

Die Multiskalenanalyse eignet sich besonders zur Kompression von Daten sowie zur nicht-parametrischen Regression, der Rauschfilterung von Signalen. Hier kommt der Ansatz der Basistransformation zum Tragen. Die Multiskalenanalyse führt für eine große Klasse von Funktionen auf eine dünn besiedelte Darstellung, d. h. viele Koeffizienten sind vom Betrag sehr klein. Jedoch ergeben sich Probleme bei dem Versuch, die Multiskalenanalyse in höhere Dimensionen zu verallgemeinern. Insbesondere affine Operationen wie Rotation können in dem Konzept nicht befriedigend eingesetzt werden. Das strenge Korsett der Orthonormal- oder Riesz-Basis führt zu Restriktionen bei der Konstruktion von Wavelets, die gewisse Skalierungsgleichungen erfüllen müssen. Verallgemeinerungen über Tensorprodukte machen sich insbesondere bei Anwendungen in der Bildverarbeitung durch störende Artefakte bemerkbar, da die Richtungen der Ordinatenachsen bevorzugt werden. Ebenso kann die für die Bildanalyse zentrale Forderung nach einer translationskovarianten Darstellung nicht mit Basen erfüllt werden. Die Multiskalenanalyse eignet sich deshalb, trotz des Namens, nicht für eine präzise Analyse von Bilddaten.

Bei der Problemstellung der Bildanalyse ist man daran interessiert, ein Bild in interpretierbare Bestandteile zu zerlegen, um Informationen über die lokale Struktur zu gewinnen. Affine Operationen, wie Skalierung und Rotation auf dem Wavelet, sind dafür hervorragend geeignet und führen auf unitäre Darstellungen lokalkompakter topologischer Gruppen. Zu jeder quadratintegrierbaren Gruppendarstellung ist kanonisch eine Wavelet-Transformation definiert. Zur eindimensionalen affinen Gruppe gibt es eine natürliche Verallgemeinerung in höhere Dimensionen, die  $m$ -dimensionale Euklidische Gruppe mit Dilatation. Damit erweist sich der darstellungstheoretische Zugang zu Wavelets als für die Bildanalyse besser geeignet [Mur90, Ant98].

Jedoch bleibt das Problem, diese kontinuierlichen Wavelet-Transformationen zu diskretisieren, um sie für praktische Anwendungen zugänglich zu machen. Eine Diskretisierung sollte die Vorteile des kontinuierlichen Ansatzes erhalten, indem für die Bildanalyse wichtige Eigenschaften wie z. B. Translationskovarianz auf die Diskretisierung übertragen werden. Es sollte aber auch eine effiziente Implementation möglich sein.

Eine solche Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformationen wird in dieser Arbeit am Beispiel der digitalen Mammographie entwickelt.

## Digitale Mammographie

In Westeuropa und den USA gilt Brustkrebs als häufigste Todesursache bei Frauen im Alter von 35 bis 55 Jahren. Die Früherkennung von Brustkrebs hat bei dem Ziel, die Sterblichkeitsrate zu senken, eine zentrale Bedeutung. Unter den bildgebenden Verfahren

ist nur die Mammographie, die Röntgenaufnahme der Brust, geeignet, frühe Anzeichen eines Krebstumors abzubilden.

In den letzten Jahren wurde sehr intensiv an automatischen Analyse-Verfahren geforscht, die den Radiologen bei der Identifikation abnormaler Strukturen in Mammographien unterstützen [AU96, WDB<sup>+</sup>93]. Studien zeigen, dass die Befundunsicherheit durch solche Verfahren deutlich verbessert werden kann [AHB<sup>+</sup>93]. Hier spielt besonders die Erkennung und Klassifikation von Mikroverkalkungen eine wesentliche Rolle bei der Krebsfrüherkennung [HK<sup>+</sup>96]. Die Zerlegung des Bildmaterials in Komponenten auf verschiedenen Skalen ist ein natürliches Vorgehen bei der Suche nach Mikroverkalkungen, da diese in verschiedenen Größen auftreten. Deshalb finden sich unter den vorgeschlagenen Verfahren viele Wavelet-basierte Ansätze [CW95, SH96, WK98]. Die hier auftretenden Problemstellungen – von der Rauschunterdrückung und Aufbereitung des Bildes über Segmentation bis zur Extraktion von Merkmalen zur Klassifikation der Verkalkungen – bieten typische Anwendungsfelder für Wavelet-Methoden [AU96, CW95].

In dieser Arbeit wird speziell die Hervorhebung von Mikroverkalkungen in digitalen Mammographien untersucht. Die für diese Aufgabe notwendige Flexibilität bei der Diskretisierung der Skalen und der Wahl des Wavelets ist mit klassischen Wavelet-Frames nicht gegeben. Die neu entwickelte integrierte Wavelet-Transformation wird als die geeignete Lösung für diese Problemstellung vorgestellt. Darüber hinaus wird ein Beitrag zur Rauschfilterung geleistet und Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten für die Detektion von Mikroverkalkungen untersucht.

## Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel stelle ich bekannte Grundlagen zur Wavelet-Transformation über lokal-kompakten Gruppen zusammen. Speziell wird eine Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten des  $\mathbb{R}^m$  mit einer Dilatationsgruppe  $H$  eingeführt. Für diese wird in den folgenden Kapiteln eine neue Diskretisierung abstrakt untersucht. Ein Spezialfall, die Euklidische Gruppe mit Dilatation, wird im zweiten Teil der Arbeit für die Anwendung auf Mammographie-Bilddaten genutzt.

Es ist bekannt, dass der Bildraum der Wavelet-Transformation als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern aufgefasst werden kann. Dies nutze ich, um bekannte Aussagen über Eigenschaften von Wavelet-Transformationen als Spezialfälle dieses allgemeineren Kontextes herzuleiten (Korollare 1.22, 1.24 und 1.33). Die Redundanz der Wavelet-Transformation erlaubt eine gewisse Freiheit bei der Wavelet-Synthese. Dies führt auf verallgemeinerte Wavelet-Transformationen, für die jedoch kein reproduzierender Kern mehr existiert (Lemma 1.28). Ich stelle Rekonstruktionsformeln für diesen verallgemeinerten Fall für die oben erwähnte Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten zusammen (Satz 1.29, Lemma 1.34 und Lemma 1.35). Darauf aufbauend führe ich eine alternative Rekonstruktion – die Morlet-Rekonstruktion – in diesem allgemeinen Kontext ein: Für die Wavelet-Transformation zu einer lokalkompakten Gruppe

$G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  gilt

$$f = \frac{1}{k_\psi} \int_H \mathcal{WT}_\psi f((h, \cdot)) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h).$$

Ich zeige für diese Rekonstruktion analoge Rekonstruktionsformeln (Proposition 1.38, Satz 1.39 und Satz 1.41). Weiter vergleiche ich die unterschiedlichen Zulässigkeitsbedingungen zwischen klassischer Rekonstruktion und Morlet-Rekonstruktion (Korollare 1.43 und 1.46). Im zweiten Kapitel wird der bekannte Ansatz zur Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation durch Abtasten der Wavelet-Koeffizienten vorgestellt. Die geforderte Translationskovarianz der Diskretisierung führt auf Wavelet-Frames und eine effiziente Implementation mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation. Für die in der Praxis häufig verwendete dyadische Wavelet-Transformation von S. Mallat zeige ich, dass die zweidimensionale Transformation als spezielle Diskretisierung einer kontinuierlichen Gruppe aufgefasst werden kann (Bemerkung 2.24). Sie ist damit einem Tensorproduktansatz überlegen.

Kern meiner Arbeit sind das dritte und vierte Kapitel. Hier führe ich eine alternative Diskretisierung – die integrierte Wavelet-Transformation – ein, welche nicht durch Abtasten, sondern durch lokale Mittelung über Wavelet-Koeffizienten konstruiert wird. Die zugrunde liegende Idee wurde von M. Duval-Destin, M. A. Muschietti und B. Torrèsani [DDMT93, MT95] für eindimensionale affine Wavelets formuliert. Im Mittelpunkt steht dort das Ziel, ein kontinuierliches Analogon zur Multiskalenanalyse zu konstruieren. So wurden die Begriffe der Skalierungsfunktion, sowie Skala und Detail von der Multiskalenanalyse auf die kontinuierliche Transformation übertragen. Diese Ansätze verallgemeinere ich in Kapitel 3 auf die Wavelet-Transformation über der  $m$ -dimensionalen Euklidischen Gruppe mit Dilatation  $\mathbb{R}^m \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(m))$ . Damit werden sie für die Bildverarbeitung zugänglich. Das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  zu einem Wavelet  $\psi$  lautet (Definition 3.10)

$$|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |\widehat{D_a R_\rho \psi}(\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a}.$$

Dieser Definition füge ich einen Phasenfaktor hinzu (Definition 3.15). Er spielt keine Rolle für die Rekonstruktion. Jedoch zeige ich (Sätze 3.16 und 3.19), dass er notwendig ist, falls die integrierte Transformation die kontinuierliche approximieren soll.

Analog werden, auf der in Kapitel 1 untersuchten Morlet-Rekonstruktion aufbauend, Morlet-integrierte Wavelets und eine Morlet-integrierte Wavelet-Transformation definiert.

Neu ist die Betrachtung von Frames aus integrierten Wavelets. Ich zeige, dass integrierte Wavelets auf feste Familien von Faltungsoperatoren führen (Satz 3.45) und weiter feste Frames (Sätze 3.46 und 3.49) erzeugen. Diese Eigenschaft ist wesentlich für die Existenz effizienter Algorithmen, da in diesem Fall die aufwendige Berechnung des dualen Frames entfällt (Bemerkung 2.9). Besonders interessant ist, dass dieses Resultat unabhängig von der Wahl der Diskretisierung der Dilatationsgruppe ist. Damit bieten integrierte Wavelets hohe Flexibilität. So kann die Diskretisierung dynamisch an die Erfordernisse der Bildanalyse angepasst werden. Dies ist mit bisher bekannten, durch Abtasten gewonnenen Frames

nicht möglich. Schließlich stelle ich den Zusammenhang zur klassischen Konstruktion von Wavelet-Frames durch Abtasten her (Korollar 3.52).

Die Ideen des Mallat-Algorithmus nutzend, kann ein flexibler Algorithmus mit integrierten Wavelet-Filtern konstruiert werden. Diesen in [MT95] vorgestellten Algorithmus übertrage ich auf den mehrdimensionalen Fall (Satz 3.41). Im Gegensatz zum mehrdimensionalen Mallat-Algorithmus, der nur zwei orthogonale Richtungen erlaubt, kann die Operation der Rotation hier beliebig diskretisiert werden. Damit ist der Algorithmus für die Bildanalyse geeignet. Leider ist er nicht sehr effizient (Lemma 3.44). Deshalb entwickle ich alternativ einen schnellen Algorithmus zur Implementation integrierter Wavelets auf Basis der schnellen Fourier-Transformation (FFT) (Abschnitt 6.6). Beiden Algorithmen ist gemein, dass die große Freiheit bei der Wahl des Wavelets nur noch eine approximative Berechnung der Wavelet-Koeffizienten erlaubt. Für meinen Algorithmus ist aber weiterhin eine exakte Rekonstruktion möglich (Lemma 6.8), für den in [MT95] vorgestellten dagegen nur für Morlet-integrierte Wavelets (Bemerkung 3.43). Diese exakte Rekonstruktion unterscheidet die Implementation integrierter Wavelets von bekannten „naiven“ Implementationen der kontinuierlichen Transformation mit Hilfe der FFT.

Die Charakterisierung der lokalen und punktweisen Regularität einer Funktion durch das Abklingverhalten ihres Wavelet-Koeffizienten entlang Maxima-Linien ist eine der für die Signalanalyse bedeutendsten Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelet-Transformation [MZ92]. Diese Charakterisierung der Lipschitz-Regularität wird auch in Kapitel 7 zur Anwendung auf Mammographien für die Konstruktion von Merkmalen genutzt. Für die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation übertrage ich diese Charakterisierung sowohl für lokale Lipschitz-Regularität (Lemma 3.60 und Satz 3.63), wie auch punktweise Lipschitz-Regularität (Satz 3.65) auf die diskrete Transformation. Obwohl die (Morlet-)integrierte Wavelet-Transformation die kontinuierlichen Wavelet-Koeffizienten nur approximiert, enthält sie den für die Bildanalyse wesentlichen Informationsgehalt.

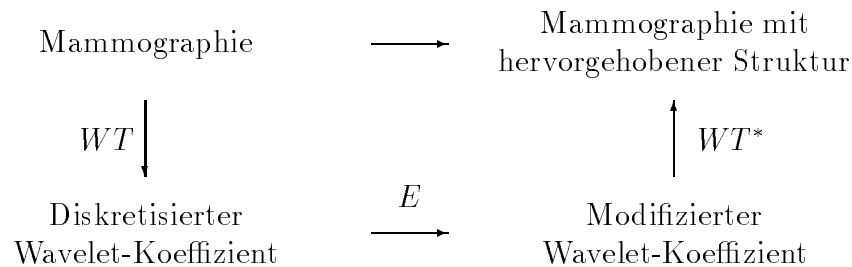
In Kapitel 4 verallgemeinere ich die Diskretisierung durch integrierte bzw. Morlet-integrierte Wavelets auf Wavelet-Transformationen über semidirekte Produkte  $\mathbb{R}^m \rtimes H$  (Definition 4.3). Für allgemeine Gruppen gibt es den gewohnten Begriff der Skala nicht. Ich führe statt dessen ein abstraktes Analogon ein (Definition 4.1).

Die bereits in Kapitel 3 geführten Betrachtungen zur Konstruktion fester Frames übertrage ich auf diesen allgemeinen Fall (Sätze 4.7, 4.9 und Korollar 4.10). Die Diskretisierung mit integrierten Wavelets kann auch als Konstruktion von Wavelets für feste Wavelet-Frames verstanden werden. Bei dieser Betrachtung stellt sich die Frage, wie reichhaltig diese Konstruktion ist. Ich zeige dazu, dass die Konstruktion integrierter und Morlet-integrierter Wavelets als Faltung bezüglich der Dilatationsgruppe  $H$  aufgefasst werden kann (Formel (4.8)). Damit gewinne ich Aussagen über Eigenschaften integrierter Wavelets (Lemma 4.16) und die Injektivität der Konstruktion des integrierten Wavelets bezüglich der Dilatationsgruppe  $\mathbb{R}_+^*$  (Lemma 4.20) und der Rotationsgruppe  $SO(2)$  (Lemma 4.21). Mit Hilfe von Resultaten über die Wiener-Algebra  $A(G)$  kann ich insbesondere zeigen, dass eine große Klasse fester Wavelet-Frames durch integrierte Wavelets erzeugt wird (Sätze 4.35, 4.38 und Korollar 4.36).

Die praktische Verwendbarkeit integrierter Wavelets demonstriere ich im zweiten Teil der Dissertation anhand einer Anwendung in der medizinischen Bildverarbeitung, der digitalen Mammographie.

Kapitel fünf führt in die Problemstellung der digitalen Mammographie ein. Weiter wird das notwendige Werkzeug zur Mustererkennung in der Bildverarbeitung zusammengestellt. Dies sind insbesondere die Konstruktion angepasster Filter sowie die Theorie der Bayes-Klassifikation. Neu ist ein Modell für Mikrokalk, welches die Wahl eines geeigneten Wavelets motiviert.

In Kapitel sechs untersuche ich speziell den Aspekt der Kontrastverbesserung und die Hervorhebung von Mikroverkalkungen in der digitalen Mammographie. Die zugrunde liegende Idee ist, diese Operationen nicht direkt auf dem Bild durchzuführen, sondern das Bild mit Hilfe der Wavelet-Transformation in interpretierbare Bausteine zu zerlegen, auf denen der Operator eine möglichst einfache Gestalt hat.



Die Wahl der Diskretisierung der Wavelet-Transformation spielt nun für die Wirkung eines Operators zur Hervorhebung eine zentrale Rolle. Diesen Zusammenhang diskutiere ich ausführlich und zeige, dass integrierte Wavelets aufgrund Ihrer Flexibilität besonders für diese Aufgabe geeignet sind. Bekannte Resultate zur Hervorhebung von Mikroverkalkungen übertreffe ich durch den Einsatz angepasster Wavelet-Filter (Beispiel 6.19) und der Diskretisierung der Wavelet-Transformation durch integrierte Wavelets (Beispiel 6.20). Aus diesen Ideen habe ich in Kooperation mit der IMAGETOOL GmbH ein neues Verfahren zur Bildanalyse entwickelt, welches im Februar 2000 beim Deutschen Patentamt zum Patent angemeldet wurde.

Mammographien weisen ein sehr schlechtes Signal-Rauschverhältnis auf, da die Strahlendosis zum Schutz der Patientin minimiert wird. Dieses Rauschen ist aufgrund physikalischer Phänomene von sehr komplexer Struktur und macht eine lokale, adaptive Rauschfilterung der Bilddaten notwendig. Eine solche habe ich als Operation auf (Morlet-) integrierten Wavelet-Koeffizienten realisiert (Beispiel 6.14). Dabei erweist sich die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation den klassischen Wavelet-Frames deutlich überlegen (Beispiel 6.13).

Die Arbeit schließt mit einem Kapitel zur Detektion von Mikroverkalkungen. Im Gegensatz zur Hervorhebung, die nur ein für den Betrachter leichter lesbares Bild generiert, wird bei der Detektion mit Hilfe eines Klassifikators eine Entscheidung gefällt, ob ein Bildpunkt Mikrokalk darstellt oder nicht. Es werden neue Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten, die



durch das mathematische Fundament motiviert sind, definiert und exemplarisch untersucht. Diese werden abschließend zur Konstruktion eines speziell an die Hervorhebung von Mikrokalk entwickelten Operators genutzt (Beispiel 7.3).

## Ausblick

Abschließend möchte ich noch mögliche Anknüpfungspunkte für weitere Forschung aufzeigen.

Die in dieser Arbeit behandelten mathematischen Fragestellungen bauen zum Teil auf der Dissertation von H. Führ *Zur Konstruktion von Wavelettransformationen in höheren Dimensionen* [Füh97] auf. Das Hauptziel seiner Arbeit ist die Konstruktion von Wavelet-Transformationen mit Hilfe quadratintegrierbarer Darstellungen. Dabei wird die Frage nach einer Diskretisierung, sowie möglicher Implementation dieser Transformationen gestellt und aufgezeigt, dass bisherige Ansätze zur Diskretisierung für diese neuen Transformationen erhebliche Komplikationen involvieren. Dieses Problem löse ich in Kapitel 4, wenn auch anders als in [Füh97] vorgeschlagen, durch die integrierte Wavelet-Transformation. Eine wichtige offene Frage bleibt die Interpretation und Verwendbarkeit der konstruierten Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Die Operation der Translation dient auch in höheren Dimensionen der Lokalisierung, die Rolle verschiedener Dilatationsgruppen  $H$  ist bisher kaum untersucht. Ein Beispiel ist die Arbeit von M. Duval-Destin, der in seiner Dissertation [DD91] die Verarbeitung visueller Reize durch unser Gehirn untersucht. Dort wird in einer Wavelet-Transformation die Dilatationsgruppe  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$  im Zusammenhang mit Abstand und Bewegung von Objekten aus dem physikalischen Modell motiviert.

In Abschnitt 4.4 skizziere ich Ansätze, wie die Konstruktion integrierter Wavelets weiter verallgemeinert werden kann.

Die Problemstellung der Rauschfilterung tritt in dieser Arbeit an zwei Stellen auf. Zum einen verallgemeinere ich in Abschnitt 5.4 eine Fehlerabschätzung von Orthonormalbasen auf Frames, zum anderen demonstriert Beispiel 6.13, dass die Morlet-Rekonstruktion einer Frame-Rekonstruktion überlegen sein kann. Zur Rauschfilterung in Orthonormalbasen gibt es zahlreiche, tief in die Stochastik reichende weiterführende Ergebnisse, z. B. [DJ94, JS97]. Soweit mir bekannt ist, wurde die Verallgemeinerung auf Frames bisher genauso wenig untersucht, wie Rauschfilterung mit Morlet-Rekonstruktion. Es stellt sich die Frage, inwieweit weitere klassische Ergebnisse übertragen werden können und für welche Regressionsprobleme die jeweiligen Methoden optimal sind.

Zu den in den letzten beiden Kapiteln behandelten angewandten Fragestellungen bieten sich zahlreiche Anknüpfungspunkte in die Ingenieurwissenschaften, wie zum Beispiel Merkmalselektion und Klassifikation.

# Danksagung

Sehr herzlich bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Günter Schlichting und Dr. Hartmut Führ für die ausgezeichnete Betreuung. Besonders danke ich Dr. Hartmut Führ für zahlreiche Anregungen und sein während seines einjährigen Forschungsaufenthaltes in Marseille auch aus großer räumlicher Distanz nicht nachlassendes Interesse am Fortschritt meiner Arbeit.

Ein ebenso herzlicher Dank geht an Herrn Dr. habil. Wilfried Schneider, Geschäftsführer der IMAGETOOL GmbH, Berlin, der mich in die Problemstellung der computergestützten Analyse digitaler Mammographien eingeführt und die Entwicklung der Anwendung intensiv betreut hat. Den Mitarbeitern der IMAGETOOL GmbH, insbesondere Herrn Johann Drexl, danke ich für die aktive konstruktive Kritik.

Für wertvolle Anregungen und Diskussion zu Fragestellungen der Wavelet- und Fourier-Analyse danke ich Prof. Bruno Torrèsani, Universität Marseille, Prof. Hans G. Feichtinger, Universität Wien, Prof. Jean-Pierre Kahane, Université Paris Orsay, sowie Prof. Stéphane Jaffard, Université Paris XII.

Frau Prof. Kessler und Frau Dr. Gregor vom Klinikum Großhadern danke ich für die mir gewährten Einblicke in die medizinische Seite der Mammadiagnostik. Ebenso danke ich Herrn Dr. Bick und Herrn Dr. Dieckmann von der Charité der Humboldt Universität Berlin.

Bei Herrn Prof. Peter Gritzmann und Dr. Andreas Brieden bedanke ich mich für die produktiven Rahmenbedingungen im Graduiertenkolleg Angewandte Algorithmische Mathematik. Meinen Mitstipendiaten danke ich für die angenehme Atmosphäre und gute Zusammenarbeit.

Mein besonderer Dank gilt Brigitte.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kontinuierliche Wavelet-Transformation</b>	<b>1</b>
1.1	Definition der Wavelet-Transformation . . . . .	1
1.2	Wavelets über semidirekten Produkten . . . . .	3
1.3	Wavelets über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation . . . . .	5
1.4	Charakterisierung des Bildes als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern	9
1.5	Klassische Wavelet-Synthese . . . . .	14
1.5.1	Allgemeine Rekonstruktionswavelets . . . . .	14
1.5.2	Normkonvergenz der Rekonstruktion . . . . .	19
1.6	Morlet-Rekonstruktion . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Diskretisierung</b>	<b>29</b>
2.1	Multiskalenanalyse . . . . .	29
2.2	Frames . . . . .	33
2.3	Semidiskrete Wavelet-Transformation . . . . .	37
2.3.1	Diskretisierung der Skalen . . . . .	38
2.3.2	Die eindimensionale dyadische Transformation . . . . .	42
2.3.3	Die zweidimensionale dyadische Transformation . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Integrierte Wavelet-Transformation</b>	<b>49</b>
3.1	Skala und Detail . . . . .	50
3.2	Integrierte Wavelet-Transformation . . . . .	53
3.2.1	Zur Lokalisierung des integrierten Wavelets . . . . .	56
3.2.2	Konstruktion orientierter Filter . . . . .	59
3.3	Ein kontinuierliches Analogon zur Multiskalenanalyse . . . . .	64
3.4	Morlet-integrierte Wavelet-Transformation . . . . .	65
3.5	Approximative Filter . . . . .	69
3.6	Konstruktion fester Frames . . . . .	74
3.7	Lokale Regularitätsanalyse . . . . .	79
3.7.1	Abklingverhalten der Wavelet-Koeffizienten . . . . .	81
3.7.2	Regularität der Funktion . . . . .	82

<b>4</b>	<b>Verallgemeinerung der integrierten Wavelet-Transformation</b>	<b>87</b>
4.1	Frames aus integrierten Wavelets . . . . .	88
4.1.1	Verallgemeinerte Skalen . . . . .	88
4.1.2	Verallgemeinerte Frame-Konstruktion . . . . .	90
4.1.3	Nicht bandbeschränkte Wavelets . . . . .	93
4.2	Injektivität der Konstruktion integrierter Wavelets . . . . .	95
4.2.1	Reelle Dilatation . . . . .	98
4.2.2	Rotation . . . . .	100
4.3	Zur Charakterisierung fester Familien integrierter Wavelets . . . . .	102
4.3.1	Reelle Dilatation . . . . .	103
4.3.2	Rotation . . . . .	110
4.3.3	Feste integrierte Wavelet Frames . . . . .	112
4.4	Ausblick . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Grundlagen zur Anwendung in der digitalen Mammographie</b>	<b>115</b>
5.1	Digitale Mammographie . . . . .	115
5.2	Modell für mikrokalkförmige Strukturen . . . . .	121
5.3	Grundlagen zur Mustererkennung in der digitalen Bildverarbeitung . . . . .	124
5.3.1	Angepasste Filter . . . . .	124
5.3.2	Mustererkennung . . . . .	127
5.3.3	Bayes'sche Klassifikation . . . . .	128
5.4	Nichtlineare Rauschfilterung mit Wavelets . . . . .	131
5.4.1	Rauschfilterung in Orthogonalbasen . . . . .	131
5.4.2	Nichtstationäre Rauschfilterung . . . . .	134
5.4.3	Rauschfilterung in Frames . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Hervorhebung von Mikroverkalkungen</b>	<b>139</b>
6.1	Problemstellung . . . . .	139
6.2	Bekannte Ansätze . . . . .	141
6.3	Hervorhebung mit Frames . . . . .	144
6.4	Interpretation und Wahl des Wavelets . . . . .	146
6.4.1	Angepasste Filter . . . . .	146
6.4.2	Diskretisierte Wavelet-Koeffizienten . . . . .	148
6.5	Wahl des Wavelet-Frames . . . . .	150
6.6	Diskreter Algorithmus . . . . .	154
6.7	Der Enhancement-Operator . . . . .	156
6.8	Rekonstruktion . . . . .	159
6.9	Beispiele . . . . .	161
6.9.1	Rauschfilterung . . . . .	161
6.9.2	Parametrische Kontrastverbesserung . . . . .	168
6.9.3	Spot-Hervorhebung . . . . .	171
6.10	Zusammenfassung . . . . .	181

<b>7</b>	<b>Detektion von Mikroverkalkungen</b>	<b>183</b>
7.1	Literaturüberblick . . . . .	183
7.2	Auf Wavelet-Koeffizienten basierende Merkmale . . . . .	185
7.2.1	Punktweise Lipschitz-Regularität . . . . .	188
7.2.2	Abklingverhalten . . . . .	190
7.2.3	Skala-Winkel Darstellung . . . . .	191
7.2.4	Normierte Korrelation . . . . .	197
7.3	Hervorhebung von Mikrokalk mit skalenübergreifendem Operator . . . . .	200
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>205</b>
A.1	Fourier-Transformation . . . . .	205
A.2	Begriffe der Zeitreihenanalyse . . . . .	206
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>209</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>217</b>
	<b>Index</b>	<b>218</b>



# Kapitel 1

## Kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die ersten vier Kapitel dieser Arbeit befassen sich hauptsächlich mit der Konstruktion einer für die Analyse digitaler Mammographien geeigneten Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. Die Wavelet-Transformation wird dabei als eine durch eine quadratintegrierbare Darstellung einer lokalkompakten Gruppe definierte Integraltransformation eingeführt. Für die konkrete Anwendung im zweiten Teil der Arbeit wird nur die Euklidische Gruppe mit Dilatation betrachtet. Die Konstruktion der Diskretisierung entwickle ich in Kapitel 4 in größerer Allgemeinheit für eine Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Gruppen.

In diesem ersten Kapitel werden Grundlagen zur kontinuierlichen Wavelet-Transformation zusammengestellt. Im Mittelpunkt der Betrachtung steht dabei der darstellungstheoretische Zugang. Die Wavelet-Transformation wird in Abschnitt 1.1 für quadratintegrierbare Darstellungen von lokalkompakten Gruppen definiert. Wir betrachten in Abschnitt 1.2 speziell eine Klasse semidirekter Produkte, die tiefere Strukturaussagen über die zugehörige Wavelet-Transformation ermöglichen. Die in diese Klasse gehörende Euklidische Gruppe mit Dilatation spielt für die folgende Anwendung in der Bildanalyse eine wesentliche Rolle und wird in Abschnitt 1.3 eingeführt.

Die Interpretation der Wavelet-Transformation als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern in Abschnitt 1.4 wird genutzt, Eigenschaften der Transformation aus diesem allgemeinen Kontext herzuleiten. Dabei werden in Abschnitt 1.5 für den affinen Fall bekannte Aussagen über die Wavelet-Synthese verallgemeinert. Eine besondere Art der Rekonstruktion, die Morlet-Rekonstruktion, wird in Abschnitt 1.6 in diesem allgemeinen Kontext eingeführt und untersucht.

### 1.1 Definition der Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation lässt sich für jede quadratintegrierbare Darstellung einer lokalkompakten Gruppe definieren.

**Definition 1.1** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe und  $(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $G$ . Eine Funktion  $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  heißt **zulässig** oder auch **Wavelet**, falls  $g \mapsto \langle \psi, \mathcal{U}_g \psi \rangle$  in  $L^2(G)$  liegt.

Die Darstellung  $\mathcal{U}$  heißt **quadratintegrierbar**, wenn sie irreduzibel ist und eine zulässige Funktion  $\psi \in \mathcal{H}$  existiert.

Seien  $f, \psi \in \mathcal{H}$ . Die Abbildung  $\mathcal{WT}_\psi f : g \mapsto \langle f, \mathcal{U}_g \psi \rangle$  heißt **Wavelet-Koeffizient** von  $f$  zu  $\psi$ .

Sei  $(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  quadratintegrierbare Darstellung und  $\psi \in \mathcal{H}$  zulässig. Die **Wavelet-Transformation**  $\mathcal{WT}_\psi$  zum Wavelet  $\psi$  ist definiert durch

$$\mathcal{WT}_\psi : \mathcal{H} \rightarrow L^2(G), \quad f \mapsto \mathcal{WT}_\psi f.$$

Wavelet-Koeffizienten sind stetig aufgrund der schwachen Stetigkeit der Darstellung  $\mathcal{U}$ . Die behauptete Quadratintegrierbarkeit des Bildes  $\mathcal{WT}_\psi f$  über  $G$  ist nicht trivial und wird von M. Duflo und C. C. Moore in [DM76] gezeigt. Sie ist Teil (ii) des folgenden Satzes. Wir zitieren hier nur die für das weitere Verständnis notwendigen Ergebnisse.

**Satz 1.2** [Füh97, Satz 1.1.2] Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe und  $(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  eine irreduzible Darstellung von  $G$ .

- (i)  $\mathcal{U}$  ist genau dann quadratintegrierbar, wenn  $\mathcal{U}$  äquivalent zu einer Teildarstellung der linksregulären Darstellung  $\lambda_G$  von  $G$  ist.
- (ii) Sei  $\psi \in \mathcal{H}$  zulässig. Dann ist  $\mathcal{WT}_\psi f \in L^2(G)$  für alle  $f \in \mathcal{H}$  und die Wavelet-Transformation  $\mathcal{WT}_\psi$  ist skalares Vielfaches eines unitären Vertauschungsoperators zwischen  $\mathcal{U}$  und einer Teildarstellung von  $\lambda_G$ .
- (iii)  $\psi \in \mathcal{H}$  ist genau dann zulässig, wenn  $\mathcal{WT}_\psi f \in L^2(G)$ , für irgendein  $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}) \subset L^2(G)$  genau dann, wenn  $\psi$  zulässig ist.

Der Satz gibt die Voraussetzungen für die Existenz der Wavelet-Transformation an. Die Transformation erlaubt eine Rekonstruktion von  $f$  mit Hilfe des adjungierten Operators  $\mathcal{WT}_\psi^*$ :

**Satz 1.3** [Füh97, Satz 1.1.7] Sei  $(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  eine quadratintegrierbare Darstellung und  $\psi \in \mathcal{H}$  zulässig. Definiere  $T_\psi : L^2(G) \rightarrow \mathcal{H}$  durch das schwache Operatorintegral

$$T_\psi(F) := \frac{1}{c_\psi} \int_G \langle F, \lambda_G(g) \mathcal{WT}_\psi \psi \rangle \mathcal{U}(g) \psi \, d\mu_G(g).$$

Dann ist  $T_\psi$  der adjungierte Operator  $\mathcal{WT}_\psi^*$  von  $\mathcal{WT}_\psi$  und es gilt  $\mathcal{WT}_\psi^* \circ \mathcal{WT}_\psi = \text{Id}_{\mathcal{H}}$  und  $\mathcal{WT}_\psi \circ \mathcal{WT}_\psi^* = P_{\text{Im}(\mathcal{H})}$  die Orthogonalprojektion auf  $\text{Im}(\mathcal{H})$ .

Insbesondere gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_\pi$  die Wavelet-Synthese:

$$f = \mathcal{WT}_\psi^* \circ \mathcal{WT}_\psi f = \frac{1}{c_\psi} \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \psi \, d\mu_G(g). \quad (1.1)$$



## 1.2 Wavelets über semidirekten Produkten

Wir betrachten als Gruppen speziell das semidirekte Produkt des  $\mathbb{R}^m$  mit einer lokalkompakten Gruppe  $H$ . Dieser Abschnitt stellt die für uns wesentlichen bekannten Resultate zusammen, wie sie in der Arbeit von H. Führ [Füh97] ausführlich untersucht werden. Bei der Betrachtung verschiedener Rekonstruktionsformeln in den folgenden Abschnitten wird auf diese Resultate zurückgegriffen. Ebenso werden Aussagen über in Kapitel 3 definierte integrierte Wavelet-Transformation in Kapitel 4 für diese allgemeinere Familie von Wavelet-Transformationen formuliert.

Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ , wobei  $H$  abgeschlossene Untergruppe der  $GL(m, \mathbb{R})$  ist. Die Gruppe  $H$  heißt **Dilatationsgruppe**. Die Gruppenmultiplikation für das semidirekte Produkt ist gegeben durch  $(b, h) \circ (b', h') = (b + hb', hh')$ , wobei  $(b, h), (b', h') \in \mathbb{R}^m \rtimes H = G$ . Sei  $d\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^m$  und  $\mu_H$  sei linkes Haar-Maß von  $H$ . Das Haar-Maß auf  $G$  ist dann gegeben durch  $d\mu_G(x, h) = |\det(h)|^{-1} d\lambda(x) d\mu_H(h)$ , wie elementar nachgerechnet werden kann [HR63, 15.29].

$\mathcal{U} : G \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^m))$  bezeichne die **quasireguläre Darstellung** von  $G$ , d. h.

$$\mathcal{U}_{(b,h)}f(x) := T_b\pi_h f(x) := |\det(h)|^{-1/2} f(h^{-1}(x - b)).$$

$\mathcal{U}$  ist unitär und stetig.

Die Wahl  $H < GL(m, \mathbb{R})$  ist keine Einschränkung, denn nach [Füh97, Bemerkung 2.1.4] sind damit in Hinsicht auf quasireguläre Darstellungen bereits alle Gruppen  $G$ , die topologisches semidirektes Produkt von  $\mathbb{R}^m$  mit einer beliebigen lokalkompakten Gruppe  $H$  sind, abgehandelt.

Die Frage nach irreduziblen und weiter quadratintegrierbaren Teildarstellungen von  $\mathcal{U}$  wird von H. Führ in [Füh97] ausführlich behandelt. Weiter wird ein explizites Kriterium für die Zulässigkeit einer Funktion angegeben. Dazu spielt die zu  $\mathcal{U}$  äquivalente Darstellung auf  $L^2(\widehat{\mathbb{R}^m})$ , die man aus  $\mathcal{U}$  durch Konjugation mit der Fourier-Transformation erhält, eine wesentliche Rolle.  $(\widehat{\mathbb{R}^m}, +)$  ist die duale Gruppe zu  $(\mathbb{R}^m, +)$ . Die Dualität ist gegeben durch  $\omega(x) := \langle x, \omega \rangle := e^{-i\omega x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m, \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}$ . Die Operation von  $H$  auf  $\widehat{\mathbb{R}^m}$  von rechts lautet  $\langle x, \omega \cdot h \rangle := \langle hx, \omega \rangle$ .

Das ergibt eine Operation, d. h.  $\omega \cdot (gh) = (\omega \cdot g) \cdot h$ , denn

$$\langle x, \omega \cdot (gh) \rangle = \langle (gh)x, \omega \rangle = \langle g(hx), \omega \rangle = \langle hx, \omega \cdot g \rangle = \langle x, (\omega \cdot g) \cdot h \rangle, \quad g, h \in H.$$

Im Fourier-Bereich operiert  $\mathcal{U}$  auf  $L^2(\widehat{\mathbb{R}^m})$  durch

$$\widehat{\mathcal{U}_{(b,h)}f}(\omega) = |\det(h)|^{1/2} e^{-ib\omega} \hat{f}(\omega h) \quad \text{für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}.$$

Die irreduziblen Teildarstellungen der quasiregulären Darstellung lassen sich mit Hilfe verallgemeinerter Hardy-Räume charakterisieren.

**Definition 1.4** Sei  $V \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  messbar. Dann bezeichnet

$$\mathcal{H}_V := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^m); \hat{f}(\omega) = 0 \text{ für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^k \setminus V \right\}$$

den verallgemeinerten Hardy-Raum zu  $V$ .

Die verallgemeinerten Hardy-Räume sind genau die translationsinvarianten Teilräume des  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Es gilt der folgende

**Satz 1.5** [Füh97, Satz 2.2.4] Sei  $\mathcal{H}$  ein Teilraum von  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .  $\mathcal{H}$  ist genau dann invariant unter  $\mathcal{U}$ , wenn es ein messbares  $V \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  gibt mit  $VH = V$  und  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_V$ .

Man kann nun zeigen, dass die irreduziblen Teildarstellungen den offenen Orbits von  $H$  in  $\widehat{\mathbb{R}}^m$  entsprechen. Dazu wird der Begriff der fast regulären Einbettung benötigt.

**Definition 1.6** Sei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  abgeschlossen. Die  $H$ -Orbits in  $\mathbb{R}^m$  heißen **fast abzählbar separiert**, wenn eine  $H$ -invariante,  $\lambda$ -konull Borel-Teilmenge  $O \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  und eine Folge  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $H$ -invarianter, Borel-messbarer Teilmengen von  $O$  existieren, die die Orbits in  $O$  separieren, das heißt, für alle  $\gamma \in O$  gilt  $\gamma H = \bigcap \{V_n; \gamma \in V_n\}$ .  $\mathbb{R}^m \triangleleft G$  heißt dann **fast regulär eingebettet**.

**Satz 1.7** [Füh97, Satz 2.3.16] Sei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  abgeschlossen,  $\mathbb{R}^m$  sei fast regulär eingebettet. Eine Teildarstellung  $\pi_V$  von  $\mathcal{U}$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $V$  äquivalent zu einem offenen Orbit ist. Falls es eine irreduzible Teildarstellung von  $\pi$  gibt, so zerfällt  $\pi$  bereits in endlich viele irreduzible Teildarstellungen.

Im folgenden sei  $V \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  offen. Operiert  $H$  auf  $V$ , so ist der **Stabilisator** von  $H$  in  $\gamma \in V$  die durch  $H_\gamma := \{h \in H; h\gamma = \gamma\}$  definierte Untergruppe. Für topologische Gruppen ist  $H/H_\gamma$  topologisch isomorph zum Orbit  $H\gamma$ . Die Charakterisierung quadratintegrierbarer Darstellungen erfolgt nun durch die Stabilisatorgruppen von  $H$ .

**Satz 1.8** [Füh97, Satz 2.4.5]  $\pi_V$  ist genau dann quadratintegrierbar, wenn die Stabilisatorgruppen  $H_\gamma$ ,  $\gamma \in V$  kompakt sind.

Wir stützen uns im folgenden – sowie später in Kapitel 4 – auf diese Resultate und betrachten Wavelet-Transformationen zu einer quasiregulären Darstellung  $\mathcal{U} = T_b \pi_h$ , die auf dem, von dem offenen  $H$ -Orbit  $V \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  aufgespannten, verallgemeinerten Hardy-Raum  $\mathcal{H}_V$  quadratintegrierbar ist.

Für solche Wavelet-Transformationen gibt es eine Charakterisierung für die Zulässigkeit einer Funktion, welche wir später nutzen werden.

**Lemma 1.9** [Füh97, Lemma 2.4.1] Für  $\gamma \in V$  sei  $p_\gamma : H \rightarrow V$ ,  $h \mapsto \gamma h$ . Dann gilt für beliebige  $\gamma, \delta \in V$  und eine beliebige messbare positive Funktion  $F$  auf  $V$ :

$$\int_H (g \circ p_\gamma)(h) d\mu_H(h) = \int_H (g \circ p_\delta)(h) d\mu_H(h).$$

**Lemma 1.10** [Füh97, Lemma 2.4.3] Seien  $f, \psi \in \mathcal{H}_V$ ,  $\gamma_0 \in V$ . Dann gilt

$$\|\langle f, \pi(\cdot)\psi \rangle\|_{L^2(G)} = (2\pi)^{m/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|\hat{\psi} \circ p_{\gamma_0}\|_{L^2(H)}.$$

Also ist  $\psi$  genau dann zulässig, wenn  $\hat{\psi} \circ p_\gamma \in L^2(H)$ .

Bezeichne  $\tilde{\mu}$  das Bildmaß von  $\mu_H$  unter der Projektionsabbildung  $p_\gamma$ , definiert durch  $\tilde{\mu}(A) := \mu_H(p_\gamma^{-1}(A))$ . Dann ist nach obigem Lemma  $\psi$  genau dann zulässig, wenn

$$0 < \int_V |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\tilde{\mu}(\omega) = \int_H |(\hat{\psi} \circ p_\gamma)(h)|^2 d\mu_H(h) := c_\psi < \infty.$$

Das Maß  $d\tilde{\mu}$  kann explizit bestimmt werden:

**Satz 1.11** [Füh97, Satz 2.4.7] Sei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  abgeschlossen,  $V \subset \widehat{\mathbb{R}^m}$  ein offener  $H$ -Orbit, dessen zugehörige Stabilisatorgruppen kompakt sind. Sei  $\gamma \in V$  fest. Die Modularfunktion  $\Delta_G$  ist konstant auf der Stabilisatorgruppe  $H_\gamma$  und induziert eine wohldefinierte  $C^\infty$ -Funktion  $\tilde{\Delta}_G : V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , vermöge

$$\tilde{\Delta}_G(\gamma h) := \Delta_G(0, h) = \Delta_H(h) |\det(h)|^{-1}.$$

Es gilt dann für  $\psi \in \mathcal{H}_V$

$$\psi \text{ ist zulässig} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \int_V |\hat{\psi}(\omega)|^2 \tilde{\Delta}_G(\omega) d\lambda(\omega) < \infty.$$

### 1.3 Wavelets über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation

Für die Bildanalyse spielen affine Operationen wie Translation, Dilatation und Rotation eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt wird die dafür geeignete Wavelet-Transformation über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation bereitgestellt. Diese Gruppe gehört zu der oben vorgestellten Klasse semidirekter Produkte. In Kapitel 3 wird eine Diskretisierung der zugehörigen Wavelet-Transformation vorgestellt, welche in Kapitel 6 für die Anwendung auf Mammographien verwendet wird.

Im mehrdimensionalen Fall führt die volle affine Gruppe nicht mehr auf eine Wavelet-Transformation, vgl. [Füh97]. Wir nehmen eine Untergruppe, die  **$m$ -dimensionale Euklidische Gruppe mit Dilatation**  $G := \mathbb{R}^m \rtimes H$ , auch *Ähnlichkeitsgruppe* genannt. Sie ist semidirektes Produkt aus Translationen des  $\mathbb{R}^m$  und einer Dilatationsgruppe  $H := SO(m) \times \mathbb{R}_+^*$ . Diese besteht aus den Rotationen der  $SO(m) := \{A \in \mathbb{R}^{m \times m}; A^t = A^{-1}, \det A = 1\}$  und skalaren positiven Dilatationen.

Im eindimensionalen Fall  $m = 1$  wird von der **affinen Gruppe**  $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$  die Zusammenhangskomponente  $G := \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^+$  der positiven Dilatationen betrachtet, die sogenannte „ax+b“-Gruppe. Sie ist mit  $SO(1) = \{1\}$  die kanonische eindimensionale Version der Euklidischen Gruppe mit Dilatation. Die zugehörige quasireguläre Darstellung ist allerdings nicht irreduzibel auf  $L^2(\mathbb{R})$ , sie hat zwei offene Orbits,  $\mathbb{R}^+$  und  $\mathbb{R}^-$  in  $\widehat{\mathbb{R}}$ , vgl. auch [Hei98, LMR94]. Indem man von einer Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  Zulässigkeit bezüglich beider Orbits mit gleicher Zulässigkeitskonstante fordert, erhält man eine Transformation auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ . Wir werden den eindimensionalen Fall im folgenden nicht explizit erwähnen, schließen ihn aber bei allen Aussagen über Wavelet-Transformationen über die Euklidische Gruppe mit Dilatation mit ein. Es werden stillschweigend die obiger Konstruktion entsprechenden Anpassungen angenommen.

**Bemerkung 1.12** Der Ansatz, mehrere quadratintegrierbare Teildarstellungen  $(\mathcal{U}_i, \mathcal{H}_i)$  zu einer Transformation auf  $\mathcal{H} := \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ , zusammen zu schalten, funktioniert allgemein. Für eine Menge quadratintegrierbarer Teildarstellungen  $(\mathcal{U}_i, \mathcal{H}_{V_i})$  der oben eingeführten quasiregulären Darstellung von  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  über offene Orbits  $V_i \subset \widehat{\mathbb{R}}^m$  gilt dann  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_V$  mit  $V = \bigcup_i V_i$ .  $\square$

Bezeichne  $g = (b, \rho, a) \in G$ , mit  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$  und  $\rho \in SO(m)$ . Als Gruppe affiner Abbildungen operiert  $G$  auf  $\mathbb{R}^m$  von links durch die Abbildung

$$x \mapsto a\rho(x) + b, \quad \forall (b, \rho, a) \in G$$

und von rechts durch

$$x \mapsto a^{-1}\rho^{-1}(x - b), \quad \forall (b, \rho, a) \in G.$$

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Die **Translation**  $T$ , die **Dilatation**  $\mathcal{D}$  und die **Rotation**  $R$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} T_b : x &\mapsto f(x - b), & \forall b \in \mathbb{R}^m, \\ \mathcal{D}_a : x &\mapsto a^{-m/2}f(a^{-1}x), & \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \\ R_\rho : x &\mapsto f(\rho^{-1}(x)), & \forall \rho \in SO(m). \end{aligned}$$

Die Operatoren sind wohldefiniert, da sie als affine Abbildungen Nullmengen respektieren. Sie sind sämtlich unitäre Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Wir führen weiter die folgende Bezeichnung für die **Involution** ein:

$$\tilde{\psi}(x) := \overline{\psi(-x)}.$$

Die Abbildung  $\mathcal{U} : G \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^m))$ ,

$$(b, \rho, a) \mapsto T_b R_\rho \mathcal{D}_a,$$

ist eine unitäre Darstellung von  $G$  in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Diese Darstellung heißt auch **quasireguläre Darstellung**, da sie von der Operation der Gruppe auf dem Argument der Funktionen herrührt. Diese Darstellung ist quadratintegrierbar auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , wie z. B. elementar in [LMR94] gezeigt wird.

Der adjungierte Operator  $\mathcal{U}^*$  hat die Gestalt

$$(T_b R_\rho \mathcal{D}_a)^*(f)(x) = a^{m/2} f(a\rho(x) + b), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^m), (b, \rho, a) \in G.$$

Die Zulässigkeit ist nach Lemma 1.10 für Dimension  $m \geq 2$  äquivalent zu der Existenz von

$$0 < \int_0^\infty \int_{SO(m)} \left| \hat{\psi}(a\rho(\omega)) \right|^2 \frac{d\rho da}{a} =: c_\psi < \infty \quad (1.2)$$

für alle  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}$ ,  $\omega \neq 0$ . Die Zulässigkeitsbedingung lässt sich mit Satz 1.11 vereinfachen zu

$$0 < \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\omega\|^m} d\omega =: c_\psi < \infty. \quad (1.3)$$

Für den eindimensionalen Fall sind, wie oben beschrieben, zwei Zulässigkeitsbedingungen zu erfüllen, nämlich

$$0 < \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(a\omega) \right|^2 \frac{da}{a} = \int_{-\infty}^0 \left| \hat{\psi}(a\omega) \right|^2 \frac{da}{a} =: c_\psi < \infty, \quad \omega > 0.$$

Wir erhalten die **kontinuierliche Wavelet-Transformation** (CWT) einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  als

$$\mathcal{WT}_\psi f(g) := \langle f, T_b R_\rho \mathcal{D}_a \psi \rangle.$$

Die Wavelet-Transformation  $\mathcal{WT}_\psi$  ist nach Satz 1.2 ein **Vertauschungsoperator** zwischen der Darstellung  $\mathcal{U}$  und der regulären Darstellung  $\lambda_G$  von  $G$ , d. h.  $\mathcal{WT}_\psi \circ \mathcal{U}(g) = \lambda_G(g) \circ \mathcal{WT}_\psi$ . Wir betrachten später insbesondere Vertauschung mit Translationen des  $\mathbb{R}^m$ : Ein Operator  $A$  heißt **translationskovariant**, wenn er mit dem Translationsoperator  $T_b$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  und der Translation  $\pi_b$  auf  $G$  vertauscht, d. h.  $AT_b = \pi_b A$ .

Die Rekonstruktion von  $f$  in der  $L^2$ -Norm durch den adjungierten Operator  $\mathcal{WT}_\psi^*$  lautet nach (1.1)

$$f = \mathcal{WT}_\psi^* \circ \mathcal{WT}_\psi f = \frac{1}{c_\psi} \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \psi db d\rho \frac{da}{a^{m+1}}. \quad (1.4)$$

Dabei bezeichne  $d\rho$  das normierte linke Haar-Maß von  $SO(m)$ .

## Interpretation als Faltung

Wir können die Wavelet-Transformation zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  als Faltung auffassen und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{WT}_\psi f(b, \rho, a) &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) T_b R_\rho \mathcal{D}_a \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) R_\rho \mathcal{D}_a \tilde{\psi}(-x + b) dx \\ &= (f * R_\rho \mathcal{D}_a \tilde{\psi})(b). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Das Faltungsprodukt ist a priori keine in  $b \in \mathbb{R}^m$  integrierbare Funktion.

Bei dieser Betrachtung ist eine  $L^1$ -Normierung der Gruppendarstellung angemessener und in der Literatur üblich. Dies betrifft nur die Dilatation. Um Verwechslungen zu dem  $L^2$ -normierten Operator zu vermeiden, bezeichnen wir die  $L^1$ -normierte Dilatation in einer anderen Schrift.

Für  $a \in \mathbb{R}^*$  definieren wir die  $L^1$ -normierte Dilatation  $D_a : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ : durch

$$D_a f(x) := a^{-m/2} \mathcal{D}_a f(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^m).$$

Der adjungierte Operator  $D_a^*$  wirkt durch  $D_a^* f(x) = f(ax)$  für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Wir bezeichnen die  $L^1$ -normierte Darstellung mit  $U_g := T_b R_\rho D_a$ . Die zugehörige  $L^1$ -normierte Wavelet-Transformation lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{WT}_\psi f(b, \rho, a) &:= a^{-m/2} \mathcal{WT}_\psi f(b, \rho, a) = \langle f, U_{(b, \rho, a)} \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \frac{1}{a^m} \overline{\psi\left(\frac{\rho^{-1}(x-b)}{a}\right)} d^m x. \end{aligned}$$

Das Bild der Transformation liegt nicht mehr in  $L^2(G)$ , sie ist erst recht keine Isometrie. Da aber nur die Normierung geändert wurde, gibt es weiterhin eine Umkehrung. Dabei wird statt des Haar-Maßes  $d\mu_G$  gegen das  $L^1$ -normierte Maß

$$d\mu := \frac{d^m b d\rho da}{a}$$

integriert. Damit lautet die Rekonstruktion für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) U_g \psi d\mu(g),$$

in der  $L^2$ -Norm.

## 1.4 Charakterisierung des Bildes als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern

Das Bild  $\mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H})$  einer Wavelet-Transformation ist ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern. Diese Erkenntnis liefert bekannte Aussagen über die Wavelet-Transformation als Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Integraltransformationen. Wir stellen Grundlagen über Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern zusammen, wie sie hauptsächlich von S. Saitoh [Sai97] entwickelt wurden. Die Sätze werden weitgehend ohne Beweis zitiert. Darauf aufbauend werden Folgerungen für Wavelet-Transformationen formuliert.

Sei  $E$  eine Menge (a priori ohne Topologie),  $\mathcal{F}(E)$  der lineare Raum der komplexwertigen Funktionen auf  $E$  und  $u : E \rightarrow \mathcal{H}$  eine Abbildung in den Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ .

Sei  $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}(E)$ ,  $f \mapsto Lf$  eine lineare Abbildung, punktweise definiert durch

$$F(e) := Lf(e) := \langle f, u(e) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad e \in E. \quad (1.6)$$

Später werden wir für  $E$  die Gruppe  $G$  und für  $u$  die Darstellung  $\mathcal{U}$  angewandt auf ein Wavelet  $\psi$  wählen. Die Abbildung  $L$  ist dann genau die Wavelet-Transformation  $\mathcal{WT}$ .

Bezeichne nun  $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$K(e, e') := \langle u(e'), u(e) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (1.7)$$

den **Kern** von  $L$ . Der Bildraum von  $\mathcal{H}$  unter  $L$  wird mit  $H_K$  bezeichnet. Diese Bezeichnung rechtfertigt folgender Satz, der zeigt, dass der Raum  $H_K \subset \mathcal{F}(E)$  als Hilbert-Raum aufgefasst werden kann, der durch den Kern  $K$  eindeutig charakterisiert wird.

**Satz 1.13** [Sai97, Satz 2.1.1]  $H_K$  ist mit der durch die Norm

$$\|F\|_{H_K} := \inf_{f \in \mathcal{H}} \{\|f\|_{\mathcal{H}}, F = Lf\}$$

induzierten Topologie ein Hilbert-Raum. Es gelten:

(i) Für alle  $e' \in E$  ist die Abbildung  $e \mapsto K(e, e') \in H_K$ .

(ii) Für alle  $F \in H_K$  und alle  $e' \in E$  gilt

$$F(e') = \langle F, K(\cdot, e') \rangle_{H_K}. \quad (1.8)$$

(iii)  $K$  ist eindeutig durch  $H_K$  bestimmt.

(iv)  $L$  ist genau dann Isometrie von  $\mathcal{H}$  auf  $H_K$ , wenn  $\{u(e), e \in E\}$  in  $\mathcal{H}$  vollständig ist.

**Definition 1.14** Eigenschaften (i) und (ii) heißen **reproduzierende Eigenschaft** von  $K$ . Der Kern heißt dann **reproduzierender Kern**, der Hilbert-Raum  $H_K$  **Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern** (reproducing kernel Hilbert space, *RKHS*).

Umgekehrt existiert zu jedem nach (i) (ii) definierten Kern  $K$  ein  $u$ , so dass sich der Kern wie in (1.7) definiert schreiben lässt. Dies zeigt der Beweis zu folgendem Lemma.

**Lemma 1.15** [Sai97] *Der reproduzierende Kern  $K$  ist positiv, hat also insbesondere die folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $K(e, e) \geq 0$ ,
- (ii)  $K(e, e') = \overline{K(e', e)}$ ,
- (iii)  $|K(e, e')|^2 \leq K(e, e)K(e', e')$  für alle  $e, e' \in E$ .

BEWEIS Es ist nur zu zeigen, dass  $K$  positiv ist. Dazu wird ausgenutzt, dass der Kern als Funktion im ersten Argument nach Satz 1.13 (i) selbst in  $H_K$  liegt, sich also mit Satz 1.13 (ii) darstellen lässt durch

$$K(e, e') = \langle K(\cdot, e'), K(\cdot, e) \rangle_{H_K}. \quad (1.9)$$

Die rechte Seite definiert offensichtlich einen positiven Operator auf  $E \times E$ . □

Der folgende Satz ist eine Reformulierung von (iv) in Satz 1.13.

**Satz 1.16** [Sai97, Satz 2.1.2] *Es gilt  $\|Lf\|_{H_K} \leq \|f\|_{\mathcal{H}}$  für alle  $f \in \mathcal{H}$ .*

*Für alle  $F \in H_K$  gibt es genau ein  $f^* \in \mathcal{H}$  mit*

$$F(e) = Lf^*(e) = \langle f^*, u(e) \rangle_{\mathcal{H}} \text{ in } E$$

und

$$\|F\|_{H_K} = \|f^*\|_{\mathcal{H}}.$$

## Der Bildraum der Wavelet-Transformation als Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern

Sei nun der Hilbert-Raum als Funktionenraum  $\mathcal{H} \subset L^2(T, dm)$  über einer Menge  $T$  und einem  $\sigma$ -endlichen positiven Maß  $dm$  gegeben. Dann kann die Abbildung  $L$  aus (1.6) als Integraltransformation

$$f \mapsto Lf, \quad Lf(e) = \langle f, u(e) \rangle = \int_T f(t) \overline{u(e)t} dm(t) \quad (1.10)$$

aufgefasst werden, mit  $f \in \mathcal{H}$  und einer komplexwertigen Funktion  $u(e)t$  auf  $E \times T$  mit  $u(e) \in \mathcal{H}$  für alle  $e \in E$ .



**Satz 1.17** <sup>1</sup> Mit obigen Bezeichnungen gilt:  $H_K := L(\mathcal{H})$  ist ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern

$$K(e, e') := \langle u(e'), u(e) \rangle = \int_T u(e') t \overline{u(e) t} dm(t)$$

als Funktion auf  $E \times E$ . Die Norm auf  $H_K$  ist gegeben durch  $\|F\|_{H_K} := \|f^*\|_{\mathcal{H}}$  mit dem  $f^*$  aus Satz 1.16.

Der Zusammenhang zur Wavelet-Transformation ergibt sich, indem wir für  $E$  eine lokal kompakte Gruppe  $G$  und für  $u$  eine quadratintegrierbare Darstellung  $\mathcal{U}$  von  $G$  in  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} \subset L^2(\mathbb{R}^m)$  wählen. Dabei ist  $T := \mathbb{R}^m$  und  $dm = d\lambda$ . Es folgt  $L = \mathcal{WT}_{\psi}$ .

Für zulässiges  $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  gilt, dass  $H_K \subset L^2(E, d\mu)$  mit einem  $\sigma$ -endlichen positiven Maß  $d\mu$ , in unserem Fall ist  $d\mu$  das Haar-Maß  $d\mu_G$  von  $G$ .

Die Zulässigkeitsbedingung an das Wavelet sichert, dass der Orbit von  $\psi$  unter  $\mathcal{U}$  dicht in  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  liegt, erfüllt also genau die Forderung der Vollständigkeit in Satz 1.13(iv).

**Korollar 1.18** (i) Ist  $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ , so ist  $\mathcal{WT}_{\psi}(\mathcal{H}_{\mathcal{U}})$  ein Hilbert-Raum stetiger Funktionen mit reproduzierendem Kern

$$K_{\psi}(g, g') = \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{U}}} = \langle \psi, \mathcal{U}_{g'^{-1}g}\psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{U}}} \text{ auf } G \times G. \quad (1.11)$$

(ii) Ist  $\psi$  zulässig, so gilt mit der Normierung

$$K_{\psi}(g, g') = \frac{1}{c_{\psi}} \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{U}}} \quad (1.12)$$

$\mathcal{WT}_{\psi}(\mathcal{H}_{\mathcal{U}}) \subset L^2(G, d\mu_G)$ .

**BEWEIS** Die Aussagen wurden in [Wil97] für die affine Gruppe bewiesen. (ii) Für zulässiges  $\psi$  folgt dies direkt durch Einsetzen der durch den adjungierten Operator (1.1) gegebenen Identität  $\mathcal{WT}_{\psi}^* \circ \mathcal{WT}_{\psi} = Id$  in die Wavelet-Transformation. Für  $F \in \mathcal{WT}_{\psi}(\mathcal{H}_{\mathcal{U}})$  gilt:

$$\begin{aligned} F(g) &= \mathcal{WT}_{\psi} f(g) = \langle \mathcal{WT}_{\psi}^* \circ \mathcal{WT}_{\psi} f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{U}}} \\ &= \frac{1}{c_{\psi}} \int_G K(g, g') \mathcal{WT}_{\psi} f(g') d\mu(g') \\ &= \langle F, K(\cdot, g) \rangle_{H_K} \end{aligned}$$

mit reproduzierendem Kern  $K(g, g') := \frac{1}{c_{\psi}} \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\psi \rangle$ . Die Integralvertauschung ist erlaubt, da der Integrand für zulässiges  $\psi$  als Produkt zweier  $L^2$ -Funktionen auf  $G$  absolut integrierbar ist.

(i) Für nicht zulässiges  $\psi$  muss auf Satz 1.17 mit  $E = G$ ,  $u = \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = L^2(\mathbb{R}^m, d\lambda)$ ,  $L = \mathcal{WT}_{\psi}$  und  $T = \mathbb{R}^m$  zurückgegriffen werden. Allerdings ist in diesem Fall die Norm auf  $H_K = \mathcal{WT}_{\psi}(\mathcal{H}_{\mathcal{U}})$  nicht explizit gegeben.  $\square$

<sup>1</sup>Der Satz wird zitiert in [Sai97] sowie [Wil97] aus: S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 189, Longman Scientific & Technical, 1988.

Nach Satz 1.2(iii) ist  $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  genau dann zulässig, wenn  $H_{K_\psi} := \mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}_{\mathcal{U}}) \subset L^2(G)$ . Interessant an dem Korollar ist, dass das Bild der Wavelet-Transformation auch für nicht zulässiges  $\psi$  ein Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern ist, wenn auch kein Teilraum des  $L^2(G)$ .

**Lemma 1.19** *Der reproduzierende Kern  $K_\psi$  aus (1.11) ist stetig und gleichmäßig beschränkt. Es gilt für alle  $g, g' \in G$*

$$|K_\psi(g, g')| \leq \frac{1}{c_\psi} \|\psi\|^2. \quad (1.13)$$

**BEWEIS** Die Stetigkeit folgt aus der schwachen Stetigkeit der Darstellung  $\mathcal{U}$ . Die gleichmäßige Beschränktheit folgt direkt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Unitarität von  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Wir betrachten nun die Rolle des Wavelets. Der folgende Satz zeigt, dass Wavelet-Transformationen zu verschiedenen Wavelets sich stark unterscheiden.

**Satz 1.20** *Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  mit quadratintegrierbarer quasiregulärer Darstellung  $\mathcal{U}$  auf  $\mathcal{H}_V$  und  $V$  ein offener  $H$ -Orbit. Seien  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_V$  zulässig. Dann sind äquivalent*

- (i)  $\mathcal{WT}_{\psi_1}(\mathcal{H}_V) \cap \mathcal{WT}_{\psi_2}(\mathcal{H}_V) \neq \{0\}$ ,
- (ii)  $\mathcal{WT}_{\psi_1}(\mathcal{H}_V) = \mathcal{WT}_{\psi_2}(\mathcal{H}_V)$ ,
- (iii)  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind linear abhängig.

**BEWEIS** Der Satz wurde in [Wil97] für affine Wavelets bewiesen. Es gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii), da  $\mathcal{WT}$  linear ist. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. Zu zeigen bleibt (i) $\Rightarrow$ (iii). Dazu sei ohne Einschränkung  $\psi_1$  und  $\psi_2$  normiert mit  $c_{\psi_1} = c_{\psi_2} = 1$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \sup \{ \langle F, G \rangle_{L^2(G)} ; F \in \mathcal{WT}_{\psi_1}(\mathcal{H}_V), G \in \mathcal{WT}_{\psi_2}(\mathcal{H}_V), \|F\| = \|G\| = 1 \} &= \quad (1.14) \\ &= \sup \{ \langle \mathcal{WT}_{\psi_1} f, \mathcal{WT}_{\psi_2} g \rangle_{L^2(G)} ; f, g \in \mathcal{H}_V, \|f\| = \|g\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle \mathcal{WT}_{\psi_2}^* \mathcal{WT}_{\psi_1} f, g \rangle_{L^2(G)} ; f, g \in \mathcal{H}_V, \|f\| = \|g\| = 1 \} \\ &= \sup \{ c_{\psi_1 \psi_2} \langle f, g \rangle_{L^2(G)} ; f, g \in \mathcal{H}_V, \|f\| = \|g\| = 1 \} \\ &= c_{\psi_1 \psi_2}. \end{aligned}$$

Da  $f = g$  möglich ist, wird das letzte Supremum angenommen. Nun gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf  $H$ :

$$\begin{aligned} c_{\psi_1 \psi_2} &= \int_H \left( \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h) \\ &\leq \sqrt{\int_H \left( \left| \hat{\psi}_1 \right|^2 \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h)} \sqrt{\int_H \left( \left| \hat{\psi}_2 \right|^2 \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h)} = 1 \end{aligned}$$

Die Identität gilt genau dann, wenn  $\psi_1$  und  $\psi_2$  linear abhängig sind.

Falls nun ein nichttriviales Element aus dem Schnitt von  $\mathcal{WT}_{\psi_1}(\mathcal{H}_V)$  und  $\mathcal{WT}_{\psi_2}(\mathcal{H}_V)$  existiert, so nimmt (1.14) den Wert 1 an. Also sind  $\psi_1$  und  $\psi_2$  linear abhängig.  $\square$

Mit anderen Worten: Die Abbildung  $(f, \psi) \mapsto \mathcal{WT}_\psi f$  ist für  $f, \psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $\|\psi\| = 1$  injektiv. Das zeigt, dass die Bedeutung des Wavelets für die kontinuierliche Wavelet-Transformation sehr groß ist. Für die Anwendung auf Mammographien spielt deshalb auch die Wahl eines geeigneten Wavelets eine wesentliche Rolle, vgl. Abschnitt 6.4 sowie Beispiel 6.19.

Welche Eigenschaften der Transformaten  $\mathcal{WT}_\psi f$  sind unabhängig von der Wahl des Wavelets und hängen nur von der Funktion  $f$  ab? Dies ist im wesentlichen die Lipschitz-Regularität der Funktion  $f$ , welche sich im Abklingverhalten der Wavelet-Koeffizienten widerspiegelt. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 3.7 genauer untersucht.

## Partielle Rekonstruktion

In Kapitel 6 entwickeln wir eine Methode, Strukturen in Mammographien durch Veränderung (diskretisierter) Wavelet-Koeffizienten hervorzuheben. Bei einer redundanten Transformation stellt sich dabei die Frage, ob bei lokaler Änderung des Koeffizienten  $\mathcal{WT}_\psi f$  das Bild der Wavelet-Transformation  $\mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}_V)$  verlassen wird. Wir zeigen hier, dass dies leider zwingend der Fall ist. Dies bedeutet, dass für die Rekonstruktion durch den adjungierten Operator, wie sie im folgenden Abschnitt 1.5 vorgestellt wird, implizit erst eine Projektion auf  $\mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}_V)$  stattfindet.

Betrachten wir die partielle Rekonstruktion

$$\frac{1}{c_\psi} \int_G \chi_M(g) \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \psi(x) d\mu_G(g) =: f^0.$$

Offensichtlich gilt  $\|f^0\| \leq \|f\|$ . Der folgende Satz zeigt, dass diese Ungleichung für kompakte  $M$  sogar immer echt ist.

**Satz 1.21** *Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet und  $M \subset G$  eine  $\mu_G$ -messbare Menge endlichen Maßes. Dann existiert ein  $C_{\psi, M} > 0$  so dass für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  gilt*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C_{\psi, M} \|\mathcal{WT}_\psi f - \chi_M \cdot \mathcal{WT}_\psi f\|_{L^2(G)}.$$

**BEWEIS** Der Satz wird in [Wil97, Satz 4.53] für affine Wavelets formuliert. In [Wil97, Bemerkung 4.59] wird dasselbe Ergebnis abstrakt für RKHS Räume über  $\mathbb{R}^s$  mit beschränktem Kern gezeigt. Nach 1.19 ist der Kern für die Wavelet-Transformation beschränkt.  $\square$

Mit anderen Worten: Besitzt  $M$  ein endliches Maß, so kann  $\|\mathcal{WT}_\psi f - \chi_M \cdot \mathcal{WT}_\psi f\|_{L^2(G)}$  nicht beliebig klein werden.

**Korollar 1.22** *Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Ist  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet, so kann der Träger von  $\mathcal{WT}_\psi f$  in  $L^2(G)$  kein endliches Maß besitzen.*

Dies hat Konsequenzen für die Konstruktion von auf Wavelet-Koeffizienten definierten Operatoren, wie wir sie in Kapitel 6 betrachten. Die Änderung eines Wavelet-Koeffizienten

auf einem Kompaktum  $M \subset G$  führt zwingend dazu, dass der Bildbereich der Transformation verlassen wird. Mit anderen Worten: Eine nicht-triviale Operation innerhalb des Bildes  $\mathcal{WT}(\mathcal{H})$  kann nur durch Änderung der Wavelet-Koeffizienten auf nichtkompakten Mengen erreicht werden.

## Projektion auf das Bild

**Satz 1.23** [Sai97, Satz 2.2.4] Sei  $H_K \subset H$  Hilbert-Raum mit reproduzierendem Kern. Dann ist die Abbildung  $P_K : H \rightarrow H_K$ ,  $F \mapsto P_K F$ , definiert durch

$$P_K F(e) := \langle F, K(\bullet, e) \rangle_H,$$

eine Projektion von  $H$  auf  $H_K$ .

Die Orthogonalprojektion von  $L^2(G)$  auf  $\text{Im}(\mathcal{WT}_\psi)$  ist aufgrund des folgenden, allgemeinen Arguments ein Faltungsoperator, und zwar die Faltung gegen den reproduzierenden Kern.

**Korollar 1.24** [Füh97, Satz 1.1.10] Es sei  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  eine quadratintegrierbare Darstellung der lokalkompakten Gruppe  $G$  und  $\psi \in \mathcal{H}_\pi$  ein zulässiger Vektor. Dann ist die Projektion  $P_\psi : L^2(G) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{WT}_\psi)$  ein Faltungsoperator. Es gilt:  $P_\psi F = c_\psi^{-1}(F * \langle \psi, \pi_\bullet \psi \rangle_G)$ .

BEWEIS Mit Satz 1.23 und dem Kern aus (1.11) folgt

$$\begin{aligned} P_\psi F(g') &= c_\psi^{-1} \langle F, \langle \psi, \mathcal{U}_{g'^{-1}g} \psi \rangle_{\mathcal{H}_V} \rangle_{L^2(G)} \\ &= c_\psi^{-1} \int_G F(g) \mathcal{U}_{g'^{-1}g} (\langle \psi, \mathcal{U}_\bullet \psi \rangle_{\mathcal{H}_V})(g) d\mu_G = c_\psi^{-1} (F * \langle \psi, \pi_\bullet \psi \rangle_G)(g'). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.10 in Abschnitt 2.2 zeigt das Analogon für Frames.

## 1.5 Klassische Wavelet-Synthese

Die klassische Wavelet-Synthese erfolgt mit dem adjungierten Operator  $\mathcal{WT}_\psi^*$ . In diesem Abschnitt wird die bekannte, durch die Redundanz der Wavelet-Transformation gegebene Freiheit bei der Wahl des Rekonstruktionswavelets auf semidirekte Produkte verallgemeinert.

### 1.5.1 Allgemeine Rekonstruktionswavelets

Die Wavelet-Transformation ist redundant, wie sich durch die Existenz eines reproduzierenden Kernes ausdrückt. Dies erlaubt, die Rekonstruktion (1.1) zu verallgemeinern und verschiedene Funktionen für Zerlegung und Rekonstruktion zu verwenden.

Für die Wavelet-Transformation über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation ist diese Verallgemeinerung bekannt und wurde z. B. von M. Holschneider [Hol95] untersucht.

Wir zeigen diesen Sachverhalt nun für die Wavelet-Transformation über  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Sei im folgenden also  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ , wobei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Untergruppe ist.  $V \subset \widehat{\mathbb{R}^m}$  sei offener  $H$ -Orbit und  $U_g = T_b \pi_h$  eine quadratintegrierbare Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H}_V \subset L^2(\mathbb{R}^m)$ .

**Definition 1.25** Seien  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$  mit

$$0 < \int_H \left( \left| \widehat{\psi} \widehat{\chi} \right| \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h) < \infty \quad \text{und} \quad (1.15)$$

$$0 \neq \int_H \left( \widehat{\psi} \widehat{\chi} \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h) := c_{\psi, \chi} \quad (1.16)$$

In diesem Fall sagen wir,  $\psi, \chi$  erfüllen die **gemischte Zulässigkeitsbedingung**. Dabei ist  $\gamma \in V$ . Nach Lemma 1.9 ist  $c_{\psi, \chi}$  unabhängig von der Wahl von  $\gamma$ . Die Funktion  $\chi$  heißt auch **Rekonstruktions-Wavelet**.

**Bemerkung 1.26** Sind  $\psi$  und  $\chi$  zulässig, so erfüllen sie auch die gemischte Zulässigkeitsbedingung, denn aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf  $(H, d\mu_H)$  folgt direkt  $c_{\psi, \chi} \leq c_\psi c_\chi$ .  $\square$

Bedingung (1.15) sorgt dafür, dass der Integrand der Synthese eine  $L^2$ -Funktion auf  $G$  ist, obwohl die Funktionen  $\psi$  und  $\chi$  selbst nicht notwendig zulässig sind.

Wie sieht die Situation bei der allgemeinen Rekonstruktion aus? Gibt es auch in diesem Fall einen reproduzierenden Kern? Ich zeige in Lemma 1.28, dass die in diesem Zusammenhang in der Literatur oft als reproduzierender Kern erwähnte Funktion  $\langle \mathcal{U}_g \psi, \mathcal{U}_{g'} \chi \rangle$  kein reproduzierender Kern ist, auch wenn sie eine reproduzierende Eigenschaft erfüllt.

**Definition 1.27** Der **Crosskernel**  $C_{\psi, \chi}$  auf  $G \times G$  zu  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$  ist definiert als

$$C_{\psi, \chi}(g, g') := \langle \mathcal{U}_{g'} \chi, \mathcal{U}_g \psi \rangle_{\mathcal{H}_V}, \quad g, g' \in G.$$

Der Crosskernel kann als Wechsel des Rekonstruktionswavelets betrachtet werden. Es gilt für Wavelets  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$ :

$$\mathcal{WT}_{\psi\chi}(g) = \int_G C_{\chi, \psi}(g, g') \mathcal{WT}_\chi(g') d\mu_G(g').$$

Falls  $\psi$  zulässig ist, ist der Kern nach Satz 1.13 eindeutig. Die für die Rekonstruktion verwendete Funktion  $\chi$  spielt dabei keine Rolle. Es bleibt also nur die Möglichkeit, für nicht zulässige  $\psi$  nach einem reproduzierenden Kern zu fragen. Dies beantwortet folgendes Lemma negativ.

**Lemma 1.28** Seien  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$  und die gemischte Zulässigkeitsbedingung aus Definition 1.25 erfüllt. Dann gilt für die Funktion

$$K(g, g') := \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\chi \rangle$$

die reproduzierende Eigenschaft (ii) aus Satz 1.13.

Die reproduzierende Eigenschaft (i) gilt genau dann, wenn  $\psi$  und  $\chi$  linear abhängig sind. Insbesondere gilt: Falls  $\psi \neq \chi$ , dann ist  $K$  kein reproduzierender Kern für das Bild  $\mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}_V)$ .

BEWEIS Zu Eigenschaft (ii): Sei  $F \in \mathcal{WT}_\psi f$ , d. h.  $F = \langle f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_V}$  für ein  $f \in \mathcal{H}_V$ . Für alle  $g' \in G$  gilt

$$\begin{aligned} \langle F, K(\cdot, g') \rangle_{H_K} &= \langle \langle f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_V}, \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\chi \rangle_{\mathcal{H}_V} \rangle_{H_K} \\ &= \int_G \langle f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_V} \overline{\langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\chi \rangle_{\mathcal{H}_V}} d\mu_G(g) \\ &= \int_G \langle f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_V} \langle \mathcal{U}_g\chi, \mathcal{U}_{g'}\psi \rangle_{\mathcal{H}_V} d\mu_G(g) \\ &= \left\langle \int_G \langle f, \mathcal{U}_g\psi \rangle_{\mathcal{H}_V} \mathcal{U}_g\chi, \mathcal{U}_{g'}\psi d\mu_G(g) \right\rangle_{\mathcal{H}_V} \\ &= \langle f, \mathcal{U}_{g'}\psi d\mu_G(g) \rangle_{\mathcal{H}_V} = F(g') \end{aligned}$$

(i) Zu zeigen ist: Für alle  $g' \in G$  ist die Abbildung  $g \mapsto K(g, g') \in \mathcal{WT}_\psi(\mathcal{H}_V)$ . Es gilt

$$K(g, g') = \langle \mathcal{U}_{g'}\psi, \mathcal{U}_g\chi \rangle = \mathcal{WT}_\chi \mathcal{U}_{g'}\psi(g).$$

Da Wavelet-Transformierte zu unterschiedlichen Wavelets nach Satz 1.20 nur die Null gemeinsam besitzen, folgt Eigenschaft (i) genau dann, wenn  $\psi$  und  $\chi$  linear abhängig sind.  $\square$

Wir müssen also für Wavelets, welche nur der gemischten Zulässigkeitsbedingung genügen, ohne RKHS-Struktur auskommen.

**Satz 1.29** (Orthogonalitätsrelation) Seien  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  und erfüllen die gemischte Zulässigkeitsbedingung aus Definition 1.15. Es gilt für alle  $f, k \in \mathcal{H}_V$

$$\int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \overline{\mathcal{WT}_\chi k(g)} d\mu_G(g) = c_{\psi, \chi} \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}. \quad (1.17)$$

Sind  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$  zulässig, so lässt sich die Formel schreiben als

$$\langle \mathcal{WT}_\psi f, \mathcal{WT}_\chi k \rangle_{L^2(G)} = c_{\psi, \chi} \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}. \quad (1.18)$$

BEWEIS Die Argumentation folgt [Dau92, Proposition 2.4.1]. Dort wurde der Beweis mit  $\psi = \chi$  für die affine Gruppe geführt. Der allgemeine Kontext wird durch den Dufflo-Moore Operator abgedeckt. In [Füh97, Satz 2.4.10] wird dies für  $\psi, \chi$  zulässig vorgeführt.

Es gilt für alle  $f, k \in \mathcal{H}_V$ :

$$\begin{aligned}
& \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \overline{\mathcal{WT}_\chi k(g)} d\mu_G(g) & (1.19) \\
&= \int_G \langle \hat{f}, \widehat{\mathcal{U}_g \psi} \rangle_{\mathcal{H}_V} \overline{\langle \hat{k}, \widehat{\mathcal{U}_g \chi} \rangle_{\mathcal{H}_V}} d\mu_G(g) \\
&= \int_G \int_V \hat{f}(\omega) \overline{|\det(h)|^{1/2} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(\omega h)} d\omega \int_V \overline{\hat{k}(\omega)} |\det(h)|^{1/2} e^{-ib\omega} \hat{\chi}(\omega h) d\omega d\mu_G(g) \\
&= \int_H \int_{\mathbb{R}^m} \hat{F}_h(b) \overline{\hat{K}_h(b)} db |\det(h)|^{-1} d\mu_H(h) & (1.20)
\end{aligned}$$

Dabei ist  $F_h(\omega) := |\det(h)|^{1/2} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega h)}$  und analog  $K_h$ .  $F_h$  und  $K_h$  sind damit in  $L^1(V)$ . Wir haben weiter das Haar-Maß von  $G$  ausgeschrieben. Das punktweise Produkt von  $\hat{F}_h$  mit  $\hat{K}_h$  ist eine  $L^2$ -Funktion, da  $\psi, \chi$  in  $L^1$  gewählt wurden, weshalb die Parseval-Formel angewendet werden kann. Es folgt

$$\begin{aligned}
(1.20) &= \int_H \int_V F_h(\omega) \overline{K_h(\omega)} d\omega |\det(h)|^{-1} d\mu_H(h) \\
&= \int_H \int_V \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega h) \hat{k}(\omega)} \hat{\chi}(\omega h) d\omega d\mu_H(h) \\
&= \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V} \int_H \overline{\hat{\psi}(\omega_0 h)} \hat{\chi}(\omega_0 h) d\mu_H(h) \\
&= \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V} \int_H (\overline{\hat{\psi}} \hat{\chi} \circ p_{\omega_0})(h) d\mu_H(h) \\
&= c_{\psi, \chi} \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}.
\end{aligned}$$

Dabei hängt nach Lemma 1.9 die Rechnung nicht von der Wahl von  $\omega_0 \in V$  ab. Die geforderte absolute Integrierbarkeit in (1.15) erlaubt die durchgeführten Integralvertauschungen nach dem Satz von Fubini.  $\square$

**Korollar 1.30** Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Seien  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  und erfüllen die gemischte Zulässigkeitsbedingung. Dann ist der Integral-Operator  $K_{\psi, \chi} : \mathcal{H}_V \rightarrow \mathcal{H}_V$ ,

$$K_{\psi, \chi}(f) := \frac{1}{c_{\psi, \chi}} \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi d\mu_G(g) \quad (1.21)$$

für  $\hat{f} \in L^1(V)$  gleich der Identität. Für zulässiges  $\psi$  und  $\chi$  gilt

$$K_{\psi, \chi} = \frac{1}{c_{\psi, \chi}} \mathcal{WT}_\chi^* \circ \mathcal{WT}_\psi, \quad (1.22)$$

Es gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_V$  mit  $\hat{f} \in L^1(V)$  im  $L^2$ -Sinn

$$f = \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g). \quad (1.23)$$

BEWEIS Vorbemerkung: Falls  $\psi$  und  $\chi$  zulässig sind, folgt Formel (1.23) direkt aus (1.18) mit dem adjungierten Operator:

$$\langle \mathcal{WT}_\chi^* \mathcal{WT}_\psi f, k \rangle_{L^2(G)} = c_{\psi,\chi} \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}, \quad \forall f, k \in \mathcal{H}_V.$$

Das Integral auf der rechten Seite von (1.21) ist im schwachen Sinn definiert. Es gilt für alle  $f, k \in \mathcal{H}_V$

$$\begin{aligned} \left\langle \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g), k \right\rangle_{\mathcal{H}_V} &:= \int_G \langle \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi, k \rangle_{\mathcal{H}_V} \, d\mu_G(g) \\ &= \int_G \mathcal{WT}_\psi f(g) \overline{\mathcal{WT}_\chi k(g)} \, d\mu_G(g) \\ &\stackrel{(1.19)}{=} c_{\psi,\chi} \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (1.23) im schwachen Sinn.

Schreibt man das Skalarprodukt der Wavelet-Transformation sowie das Integral über  $\mathbb{R}^m$  als Faltung, so folgt für  $f \in \mathcal{H}_V$

$$\frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_G \langle f, \mathcal{U}_g \psi \rangle \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g) = \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_H f * \pi_h(\tilde{\psi} * \chi) |\det(h)|^{-1} \, d\mu_H(h). \quad (1.24)$$

Da  $\psi, \chi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ , ist der Integrand eine  $L^2$ -Funktion. Es folgt:

$$\begin{aligned} (1.24) &= \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_H \left( \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} \widehat{\pi_h \chi}(\omega) e^{ix\omega} \, d\omega \right) |\det(h)|^{-1} \, d\mu_H(h) \\ &= \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} \, d\omega \int_H \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} \widehat{\pi_h \chi}(\omega) |\det(h)|^{-1} \, d\mu_H(h) \\ &= f(x) \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_H \overline{\hat{\psi}(\omega h)} \hat{\chi}(\omega h) \, d\mu_H(h) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Die Integrale existieren aufgrund der gemischten Zulässigkeitsbedingung (1.15) sowie  $\hat{f} \in L^1(V)$  absolut und dürfen daher vertauscht werden.  $\square$

**Bemerkung 1.31** Die Idee, für Analyse und Synthese verschiedene Wavelets zu verwenden, wurde von M. Holschneider [Hol95] weiter verallgemeinert. Für die Rekonstruktion genügt es, dass nur das Faltungsprodukt  $\psi * \chi$  die Zulässigkeitsbedingung aus Definition 1.25 erfüllt. Damit kann das Wavelet  $\psi$  aus  $L^p$ -Räumen oder sogar Distributionenräumen gewählt werden. Das Rekonstruktionswavelet  $\chi$  ist dann aus dem zugehörigen Dualraum  $L^q$  bzw. Testfunktionenraum zu wählen. Allerdings liegt die Wavelet-Transformierte solcher Konstruktionen aufgrund Satz 1.2(iii) nicht in  $L^2(G)$ .  $\square$



## 1.5.2 Normkonvergenz der Rekonstruktion

Mit den in Abschnitt 1.4 eingeführten Bezeichnungen gilt allgemein für Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern:

**Satz 1.32** [Sai97, Satz 2.2.5] Sei  $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine  $d\mu$ -messbare Ausschöpfung von  $E$ . Weiter sei  $\int_{E_n} K(e, e') d\mu(e) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Falls für  $F \in H_K$  gilt

$$t \mapsto \int_{E_n} F(e)u(e)t d\mu(e) \in \mathcal{H}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.25)$$

dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} F(e)u(e)t d\mu(e) = f^*(t)$$

in der Norm-Konvergenz für  $f^*$  aus Satz 1.16.

BEWEIS Schritt 1: Der adjungierte Operator  $L^*$  ist im schwachen Sinn definiert. Wir zeigen  $L^*(F\chi_{E_n})(x) = \int_{E_n} F(e)u(e)t d\mu(e)$ . Sei also  $g \in L^2(T, dm)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle L^*(F\chi_{E_n}), g \rangle_{L^2(T, dm)} &= \langle F\chi_{E_n}, Lg \rangle_{L^2(T, dm)} \\ &= \int_{E_n} F(e) \overline{Lg(e)} d\mu(e) \\ &= \int_{E_n} F(e) \overline{\int_T g(t)u(e)t dm(t)} d\mu(e) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_T \int_{E_n} F(e) \overline{g(t)u(e)t} d\mu(e) dm(t) \\ &= \left\langle \int_{E_n} F(e)u(e) d\mu(e), g \right\rangle_{L^2(T, dm)}, \end{aligned}$$

wobei in (\*) nach dem Satz von Fubini Integrale vertauscht wurden. Dies erlaubt die absolute Integrierbarkeit:

$$\begin{aligned} &\int_{E_n} \int_T |g(t)| |F(e)| |u(e)t| dm(t) d\mu(e) \\ &\leq \int_{E_n} \|g\|_{L^2(T, dm)} K(e, e)^{1/2} |F(e)| d\mu(e) \\ &\leq \|g\|_{L^2(T, dm)} \left\{ \int_{E_n} K(e, e) d\mu(e) \right\}^{1/2} \|F\|_{L^2(E)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Schritt 2: Es gilt  $F\chi_{E_n} \rightarrow F$  in  $L^2(E, d\mu)$  und  $L^*F = f^*$ . Da  $L^*$  stetiger Operator ist, folgt nach dem Satz über den abgeschlossenen Graphen die Behauptung.  $\square$

Damit lässt sich die Normkonvergenz der Rekonstruktion für eine beliebige quadratintegrierbare Darstellung  $\pi$  einer lokalkompakten Gruppe  $G$  in einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_\pi$  zeigen.

**Korollar 1.33** (Normkonvergenz) Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  Ausschöpfung der lokalkompakten Gruppe  $G$  durch Kompakta. Weiter sei  $\psi \in \mathcal{H}_\pi$  eine zulässige Funktionen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_\psi} \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \pi_g \psi \, d\mu(g) = f$$

in der  $L^2$ -Norm.

BEWEIS Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 1.32. Der Kern  $K_\psi$  ist nach Lemma 1.19 beschränkt. Daraus folgt  $\int_{V_n} K_\psi(g, g') d\mu_G(g) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Für  $F \in H_{K_\psi}$  gilt  $F = \mathcal{WT}_\psi f$  für ein  $f \in \mathcal{H}_\pi$ . Da  $V_n$  kompakt ist, folgt (1.25), d. h.

$$x \mapsto \int_{V_n} F(g) \pi_g \psi(x) \, d\mu_G(g) \in \mathcal{H}_V, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

□

Wir formulieren eine analoge Aussage für die allgemeine Rekonstruktion. Dabei können wir nicht auf einen reproduzierenden Kern zurückgreifen. Der in diesem Fall auftretende Crosskernel (vgl. Definition 1.27) muss für den Schluss aus Schritt 2 beschränkt sein. Weiter benutzen wir in dem Satz  $H_K \subset L^2(E)$ . Das ist gleichbedeutend mit der Zulässigkeit von  $\psi$ . Wir beweisen das folgende Resultat mit einer von obigem Satz abweichenden Argumentation. Es zeigt, dass wir  $f$  als Limes punktweise definierter Integrale gewinnen können.

**Lemma 1.34** (Verallgemeinerte Normkonvergenz) Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  und  $V$  offener  $H$ -Orbit einer quadratintegrierbaren quasiregulären Darstellung  $U$  von  $G$  in  $\mathcal{H}_V$ . Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  Ausschöpfung von  $G$  durch Kompakta. Dann gilt für jedes Paar zulässiger Funktionen  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V$ , welche die gemischte Zulässigkeitsbedingung aus Definition 1.25 erfüllen und alle  $f \in \mathcal{H}_V$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_{\psi, \chi}} \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu(g) = f$$

in der  $L^2$ -Norm.

BEWEIS Die Argumentation folgt [Dau92, 2.4]. Dort wurde der Beweis nur für die affine Gruppe und  $\psi = \chi$  geführt.

Das Integral ist als adjungierter Operator im schwachen Sinn definiert, d. h. durch Auswertung gegen ein  $k \in \mathcal{H}_V$ . Da nur über ein Kompaktum integriert wird, ist das Integral für festes  $V_n$  auch punktweise definiert. Das Integral ist absolut beschränkt:

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g), k \right\rangle &:= \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \langle \mathcal{U}_g \chi, k \rangle \, d\mu_G(g) \\ &\leq \mu(V_n) \|f\|_2 \|\psi\|_2 \|\chi\|_2 \|k\|_2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Die Integralabbildung ist damit linear und beschränkt, der Integrand (vgl. Mitte) liegt, als Produkt zweier Wavelet-Koeffizienten, in  $C_0(G)$ . Nach dem Satz von F. Riesz [Rud87, Theorem 6.19] ist das Integral also eindeutig bestimmt und der Operator kann als Element aus dem Dualraum von  $C_0(G)$  aufgefasst werden. Die Operatornorm lässt sich somit berechnen als

$$\begin{aligned}
& \left\| f - c_{\psi,\chi}^{-1} \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g) \right\| = \\
& = \sup_{\|k\|=1} \left| \left\langle f - c_{\psi,\chi}^{-1} \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu_G(g), k \right\rangle \right| \\
& \stackrel{(1.23)}{=} \sup_{\|k\|=1} \left| c_{\psi,\chi}^{-1} \int_{V_n^{\mathfrak{c}}} \mathcal{WT}_\psi f(g) \overline{\mathcal{WT}_\chi k(g)} \, d\mu_G(g) \right| \\
& \leq \sup_{\|k\|=1} \left[ c_{\psi,\chi}^{-2} \int_{V_n^{\mathfrak{c}}} |\mathcal{WT}_\psi f(g)|^2 \, d\mu_G(g) \right]^{1/2} \left[ \int_G |\mathcal{WT}_\chi k(g)|^2 \, d\mu_G(g) \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor existiert aufgrund der Zulässigkeitsbedingung an  $\chi$ . Der erste Faktor konvergiert mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null, da  $\psi$  zulässig ist.  $\square$

Es folgt noch eine Variation mit nichtkompakten Mengen. Die Idee dazu stammt von H. Führ.

**Lemma 1.35** *Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$  und  $V$  offener  $H$ -Orbit einer quadratintegrierbaren quasi-regulären Darstellung  $U$  von  $G$  in  $\mathcal{H}_V$ . Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  Ausschöpfung von  $H$  durch Kompakta. Dann gilt für jedes Paar  $\psi, \chi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$ , welches die gemischte Zulässigkeitsbedingung erfüllt und alle  $f \in \mathcal{H}_V$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_{\mathbb{R}^m \times V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi \, d\mu(g) = f$$

in der  $L^2$ -Norm.

**BEWEIS** Der Unterschied zu Lemma 1.34 liegt in der Integration über nicht kompakte Mengen  $\mathbb{R}^m \times V_n$ . Damit das Integral über  $\mathbb{R}^m$  absolut existiert, wird  $\chi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  gefordert. Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}^m \times V_n} |\mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi| \, d\mu(g) \leq \mu(V_n) \|f\|_2 \|\psi\|_2 \|\chi\|_1.$$

Es gilt mit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m \times V_n} \mathcal{WT}_\psi f(g) \mathcal{U}_g \chi(x) \, d\mu(g) \right|^2 dx & \leq \|\chi\|_2 \int_{\mathbb{R}^m \times V_n} |\langle f, \pi_g \psi \rangle|^2 \, d\mu(g) \\
& \leq \mu(V_n) \|\chi\|_2 \|f\|_2 \|\psi\|_1.
\end{aligned}$$

Die linke Seite der Formel ist damit eine  $L^2$ -Funktion. Die Fourier-Transformierte lautet

$$\widehat{f_{V_n}}(\omega) := \widehat{f}(\omega) \frac{1}{c_{\psi,\chi}} \int_{V_n} \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} \widehat{\pi_h \chi}(\omega) \, d\mu(h), \quad \omega \in V.$$

Damit folgt

$$|\hat{f}(\omega) - \widehat{f_{V_n}}(\omega)| \leq |\hat{f}(\omega)| \left( 1 - \frac{1}{c_{\psi, \chi}} \int_{V_n} \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} \widehat{\pi_h \chi}(\omega) d\mu(h) \right)$$

Also ist  $|\hat{f}(\omega) - \widehat{f_{V_n}}(\omega)|^2$  beschränkt durch die  $L^1$ -Funktion  $|\hat{f}(\omega)|^2$  und einen Faktor, der aufgrund der gemischten Zulässigkeitsbedingung für  $\omega \in V$  punktweise gegen 0 konvergiert. Anwenden des Satzes über die majorisierte Konvergenz und die Parseval Formel liefern die Behauptung.  $\square$

## 1.6 Morlet-Rekonstruktion

Die beschriebene Wahlfreiheit für die Rekonstruktion erlaubt, Wavelet und Rekonstruktionswavelet flexibler mit speziellen Eigenschaften auszustatten. Wir betrachten nun einen Extremfall für Wavelets über  $\mathbb{R}^m \rtimes H$ : Setzt man formal für das Rekonstruktionswavelet den Dirac  $\chi = \delta_0$  in (1.23) ein, so ergibt sich die **Morlet-Rekonstruktion**

$$f = \frac{1}{k_\psi} \int_H \mathcal{WT}_\psi f((\cdot, h)) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h).$$

Diese Rekonstruktion wurde z. B. in [LMR94, Lemma 1.6.24] für integrable Funktion  $f$  und Wavelet  $\psi$  für die zweidimensionale Wavelet-Transformation gezeigt. Ebenso wird sie in [DDMT93] für affine Wavelets verwendet.

Diese Morlet-Rekonstruktion definieren wir in diesem Abschnitt für Gruppen  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ . Analog zu dem vorhergegangenen Abschnitt werden Rekonstruktionsformeln gezeigt. Weiter untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Zulässigkeitsbedingungen für die klassische- und die Morlet-Rekonstruktion.

In Abschnitt 3.4 führen wir eine auf dieser Rekonstruktion aufbauende Diskretisierung, die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation, ein. Für diese wird in Abschnitt 3.7 ein Zusammenhang zwischen Lipschitz-Regularität der Funktion und dem Abklingverhalten ihrer Koeffizienten über Skalen gezeigt. In Abschnitt 6.9.1 wird diese Transformation schließlich für die Rauschfilterung von Signalen verwendet.

Für die Morlet-Rekonstruktion ist eine Zulässigkeitsbedingung an das Wavelet notwendig. Diese entspricht der durch die Motivation mit der Dirac-Distribution erwarteten Bedingung.

**Definition 1.36** Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  und für beliebiges  $\gamma \in V$  gelte

$$\int_H (|\hat{\psi}| \circ p_\gamma)(h) d\mu_H(h) < \infty \quad \text{und} \quad (1.27)$$

$$0 \neq \int_H (\overline{\hat{\psi}} \circ p_\gamma)(h) d\mu_H(h) := k_\psi. \quad (1.28)$$

Dann heißt  $\psi$  **Morlet-zulässig**.

Diese Zulässigkeitsbedingung unterscheidet sich von der in Lemma 1.10 charakterisierten Zulässigkeit für die klassische Rekonstruktion. Wir untersuchen im nächsten Abschnitt den Zusammenhang zwischen zulässig und Morlet-zulässig.

**Proposition 1.37** *Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  zulässig und  $\tilde{\psi} * \psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Dann ist  $\tilde{\psi} * \psi$  Morlet-zulässig.*

Dies folgt mit  $\widehat{\tilde{\psi} * \psi} = |\hat{\psi}|^2$  direkt aus der Definition der Zulässigkeit.

**Proposition 1.38** *(Schwache Identität) Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  Morlet-zulässig. Für alle  $f \in \mathcal{H}_V$  gilt dann*

$$f = k_\psi^{-1} \int_H \mathcal{WT}_\psi f(., h) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) \quad (1.29)$$

im schwachen Sinn.

**BEWEIS** Der Beweis ist angelehnt an den Beweis von Satz 1.29. Wir zeigen für alle  $k \in \mathcal{H}_V$  die schwache Identität

$$k_\psi^{-1} \left\langle \int_H \mathcal{WT}_\psi f(., h) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h), k \right\rangle_{\mathcal{H}_V} = \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}.$$

Die Funktion  $x \mapsto \mathcal{WT}_\psi f(x, h)$  ist a priori kein Element von  $\mathcal{H}_V$ . Dafür ist  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  notwendig. Als Wavelet-Koeffizient ist sie jedoch stetig und beschränkt. Damit existiert das im folgenden auftretende Skalarprodukt  $\langle \mathcal{WT}_\psi f(., h), k \rangle_{\mathcal{H}_V}$  mit Funktionen  $k \in \mathcal{H}_V$  auch für  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \setminus L^1(\mathbb{R}^m)$ .

Es gilt nach der schwachen Definition des Integrals

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_H \mathcal{WT}_\psi f(., h) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h), k \right\rangle_{\mathcal{H}_V} = \\ &= \int_H \langle \mathcal{WT}_\psi f(., h), k \rangle_{\mathcal{H}_V} |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, T_x \pi_h \psi \rangle_{\mathcal{H}_V} \overline{k(x)} dx |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^m} \int_V \hat{f}(\omega) \overline{|\det(h)|^{1/2} \hat{\psi}(\omega h) e^{-ix\omega}} d\omega \overline{k(x)} dx |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^m} \hat{F}_h(x) \overline{k(-x)} dx |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dabei bezeichnet  $F_h(\omega) := |\det(h)|^{1/2} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega h)}$ .  $F_h$  liegt als punktweises Produkt von  $L^2$ -Funktionen in  $L^1(V)$ . Die Fourier-Transformierte  $\hat{F}_h$  ist damit stetig und beschränkt.

Also liegt das Produkt  $\hat{F}_h \bar{k}$  in  $L^2(V)$ . Wir schreiben mit der Parseval-Identität das Integral über  $\mathbb{R}^m$  als Fourier-Transformierte in  $-x$ .

$$\begin{aligned}
(1.30) &= \int_H \int_V F_h(\omega) \overline{\widehat{k(-\omega)}} d\omega |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) \\
&= \int_H \int_V \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi(\omega h)} \hat{k}(\omega)} d\omega d\mu_H(h) \\
&= \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V} \int_H \overline{\widehat{\psi(\omega_0 h)}} d\mu_H(h) \\
&= \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V} \int_H \overline{(\widehat{\psi} \circ p_{\omega_0})(h)} d\mu_H(h) \\
&= k_\psi \langle f, k \rangle_{\mathcal{H}_V}.
\end{aligned}$$

Dabei hängt nach Lemma 1.9 die Rechnung nicht von der Wahl von  $\omega_0 \in V$  ab. Die geforderte absolute Integrierbarkeit in (1.27) erlaubt die durchgeführten Integralvertauschungen nach dem Satz von Fubini.  $\square$

**Satz 1.39** (Normidentität) Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  Morlet-zulässig. Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_V$  mit  $\hat{f} \in L^1(V)$

$$f = M_\psi f := \frac{1}{k_\psi} \int_H \mathcal{WT}_\psi f((h, \cdot)) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h)$$

im  $L^2$ -Sinn.

BEWEIS Ein Beweis für  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times S^1)$  findet sich in [LMR94, Lemma 1.6.24]. Schreibt man das Skalarprodukt der Wavelet-Transformation als Faltung, so folgt für  $f \in \mathcal{H}_V$

$$\frac{1}{k_\psi} \int_H \mathcal{WT}_\psi f((h, x)) |\det(h)|^{-1/2} d\mu_H(h) = \frac{1}{k_\psi} \int_H f * \widetilde{\pi_h \psi} |\det(h)|^{-1} d\mu_H(h). \quad (1.31)$$

Da  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ , ist der Integrand eine  $L^2$ -Funktion. Es folgt

$$\begin{aligned}
(1.31) &= \frac{1}{k_\psi} \int_H \left( \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \hat{f}(\omega) \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} e^{ix\omega} d\omega \right) |\det(h)|^{-1} d\mu_H(h). \\
&= \frac{1}{k_\psi} \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega \int_H \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} |\det(h)|^{-1} d\mu_H(h) \\
&= f(x) \frac{1}{k_\psi} \int_H \overline{\widehat{\psi(\omega h)}} d\mu_H(h) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Die Integrale existieren aufgrund der Morlet-Zulässigkeit von  $\psi$  sowie  $\hat{f} \in L^1(V)$  absolut und dürfen daher vertauscht werden.  $\square$

**Bemerkung 1.40** Diese Rekonstruktion ist insbesondere interessant, da für die Rekonstruktion keine Integration über  $\mathbb{R}^m$  durchzuführen ist, besonders in höheren Dimensionen ein erheblicher numerischer Vorteil. Wir kommen in Kapitel 6 bei der Anwendung auf digitale Mammographien auf diesen Vorteil zurück.

Die Morlet-Rekonstruktion kann als erster Schritt auf dem Weg zu einer Diskretisierung der Rekonstruktion interpretiert werden. Es bleibt dann, die Integration über  $H$  zu diskretisieren. Dies wird in Kapitel 3 ausführlich behandelt und führt auf die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation.  $\square$

**Satz 1.41** (Normkonvergenz) Sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  Ausschöpfung von  $H$  durch Kompakta. Dann gilt für jedes Morlet-zulässige Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  und alle  $f \in \mathcal{H}_V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_\psi} \int_{V_n} \mathcal{WT}_\psi f(\cdot, h) |\det(h)|^{-1/2} d\mu(h) = f$$

in der  $L^2$ -Norm.

**BEWEIS** Der Beweis verläuft analog zu Lemma 1.35. Im Gegensatz zu dort, gibt es hier keine Integration über  $\mathbb{R}^m$ . Diese ergab das, bei der Morlet-Rekonstruktion nicht vorhandene, zweite Faltungsprodukt.

Mit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  folgt  $\mathcal{WT}_\psi f(\cdot, h) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Da  $V_n$  kompakt ist, ist die linke Seite der Formel in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Die Fourier-Transformierte lautet

$$\widehat{f_{V_n}}(\omega) := \widehat{f}(\omega) \frac{1}{k_\psi} \int_{V_n} \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} |\det(h)|^{-1/2} d\mu(h), \quad \omega \in V.$$

Damit folgt

$$|\widehat{f}(\omega) - \widehat{f_{V_n}}(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega)| \left( 1 - \frac{1}{k_\psi} \int_{V_n} \overline{\widehat{\pi_h \psi}(\omega)} |\det(h)|^{-1/2} d\mu(h) \right)$$

Also ist  $|\widehat{f}(\omega) - \widehat{f_{V_n}}(\omega)|^2$  beschränkt durch die  $L^1$ -Funktion  $|\widehat{f}(\omega)|^2$  und einen Faktor, der aufgrund der Morlet-Zulässigkeit für  $\omega \in V$  punktweise gegen 0 konvergiert. Anwenden des Satzes über die majorisierte Konvergenz und die Parseval Formel liefern die Behauptung.  $\square$

## Zulässigkeit

Für Morlet-zulässiges, nicht zulässiges Wavelet  $\psi$  ist die Transformierte nicht mehr in  $L^2(G)$ . Wie wir gesehen haben, ist trotzdem eine Rekonstruktion möglich.

Es stellt sich die Frage, wie Morlet-Zulässigkeit und klassische Zulässigkeit zusammenhängen. Dies wurde bisher, soweit mir bekannt, nicht betrachtet. Die Zulässigkeitsbedingungen an das Wavelet  $\psi$  können als Integrierbarkeit  $\hat{\psi} \circ p_\gamma \in L^1(H)$  bzw. Quadratintegrierbarkeit  $\hat{\psi} \circ p_\gamma \in L^2(H)$  bezüglich des linken Haar-Maßes der Dilatationsgruppe  $H$

aufgefasst werden. Dies lässt erwarten, dass keine der Zulässigkeiten für die andere hinreichend ist, da sich  $L^1$  und  $L^2$  auf nichtkompakten Mengen  $H$  gegenseitig überlappen. Allerdings müssen die Funktionen  $\psi$  zusätzlich in  $L^2(\mathbb{R}^m)$  liegen. Damit wird die Freiheit für Gegenbeispiele eingeschränkt.

Ich schränke die Diskussion auf die Euklidische Gruppe mit Dilatation ein. Wie wir sehen werden, ist jedes praktisch relevante Wavelet sowohl zulässig, als auch Morlet-zulässig.

**Lemma 1.42** *Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und  $\hat{\psi}$  in einer Nullumgebung beschränkt. Dann gilt: Ist  $\psi$  Morlet-zulässig, so ist es auch zulässig.*

**BEWEIS** Für die Zulässigkeitsbedingungen ist nur die nicht-kompakte Gruppe  $\mathbb{R}_+^*$  wesentlich. Daher betrachten wir ohne Einschränkung nur die Integration über dieselbe.

Sei  $\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Für die Existenz des Integrals der Zulässigkeitsbedingung interessiert nur das Verhalten um Null, da  $\int_\varepsilon^\infty |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{\psi}\|_2^2$ . Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $\hat{\psi}$  ist in der Nullumgebung  $\|\omega\| < \varepsilon$  beschränkt durch  $C := \sup_{\|\omega\| < \varepsilon} |\hat{\psi}(\omega)|$ . Dann gilt

$$\int_0^\varepsilon |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \leq \varepsilon C \int_0^\varepsilon |\hat{\psi}| \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a}.$$

Für Morlet-zulässiges  $\psi$  ist die rechte Seite endlich. □

**Korollar 1.43** *Für Funktionen  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$  folgt aus Morlet-zulässig auch zulässig.*

**BEWEIS** Falls  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  ist, dann ist  $\hat{\psi}$  stetig und daher in einer Nullumgebung beschränkt. □

Nun ein Beispiel für eine Funktion  $\psi$ , welche Morlet-zulässig aber nicht zulässig ist. Offensichtlich muss in diesem Fall  $\hat{\psi}$  in jeder Nullumgebung unbeschränkt sein, da sonst nach obigen Lemma Zulässigkeit folgt. Andererseits kann es für  $\hat{\psi}$  keine Nullumgebung  $B_\varepsilon := [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , geben, mit  $|\hat{\psi}(x)| > 1$  auf ganz  $B_\varepsilon$ , da sonst  $\int_{[0, \varepsilon]} \frac{|\hat{\psi}| \circ p_\gamma(a)}{a} da$  nicht existiert, die Funktion also nicht Morlet-zulässig sein kann.

**Beispiel 1.44** Sei  $0 < \alpha < 1/2$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze  $a_k := k^{-\alpha}$  und  $b_k := a_k e^{-k^{-3}}$ . Definiere  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  durch

$$\hat{\psi}(\omega) := \begin{cases} k & \text{falls } \|\omega\| \in [b_k, a_k], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $\psi$  Morlet-zulässig aber nicht zulässig. Vgl. auch Abbildung 1.1. □

**BEWEIS** Schritt 1: Es ist zu zeigen, dass  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , d. h.  $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Da der Träger von  $\hat{\psi}$  auf ein Kompaktum beschränkt ist, genügt es,  $\|\hat{\psi}(\omega)\| \leq \|\omega\|^{-\alpha}$  für  $\alpha < 1/2$ , zu zeigen. Es gilt  $\hat{\psi}(a_k) = k \leq a_k^\alpha$  und ebenso  $\hat{\psi}(b_k) = \hat{\psi}(a_k) \leq a_k^\alpha \leq b_k^\alpha$ .



Schritt 2: Zu zeigen:  $\psi$  ist Morlet-zulässig. Mit  $\ln\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = k^{-3}$  folgt für beliebiges  $\gamma \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} k_\psi &= \int_0^\infty \hat{\psi} \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{b_k}^{a_k} \frac{1}{a} \hat{\psi} \circ p_\gamma(a) da = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{\psi} \circ p_\gamma(a_k) \left( \ln(a) \Big|_{b_k}^{a_k} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{\psi} \circ p_\gamma(a_k) \ln\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot k^{-3} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Schritt 3: Analog folgt

$$c_\psi = \int_0^\infty \left( |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma \right) (a) \frac{da}{a} = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \cdot k^{-3} = \infty.$$

Damit ist  $\psi$  nicht zulässig. □

Betrachten wir nun die umgekehrte Fragestellung: Wann könnte  $\psi$  zulässig, aber nicht Morlet-zulässig sein? Dazu wieder erst ein negatives Resultat:

**Lemma 1.45** *Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Es gelte  $\hat{\psi}(0) = 0$  und  $\hat{\psi}$  ist in 0 punktweise Lipschitz  $\alpha$  für ein  $\alpha > 0$ . (Zur Definition der punktweisen Lipschitzregularität vgl. Definition 3.55). Weiter sei  $\int_H \left( \hat{\psi} \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h) \neq 0$ .*

*Dann gilt: Ist  $\psi$  zulässig, so ist es auch Morlet-zulässig.*

**BEWEIS** Es gibt ein  $C > 0$  mit  $\|\hat{\psi}(\omega)\| < C\|\omega\|^\alpha$  für  $\|\omega\| \leq 1$ . Für  $0 < a < 1$  gilt

$$\int_0^1 |\hat{\psi}| \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \leq C \int_0^1 a^{-1+\alpha} da < \infty.$$

Für  $a > 1$  betrachte  $M_1 := \{a > 1; |\hat{\psi}|(a) \geq \frac{1}{a}\}$  und  $M_2 := \{a > 1; |\hat{\psi}|(a) < \frac{1}{a}\}$ . Aufgrund  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  folgt für  $M_1$ :

$$\int_{M_1} |\hat{\psi}| \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \leq \int_{M_1} |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(a) da \leq \|\psi\|_2 < \infty.$$

Für  $M_2$  gilt direkt

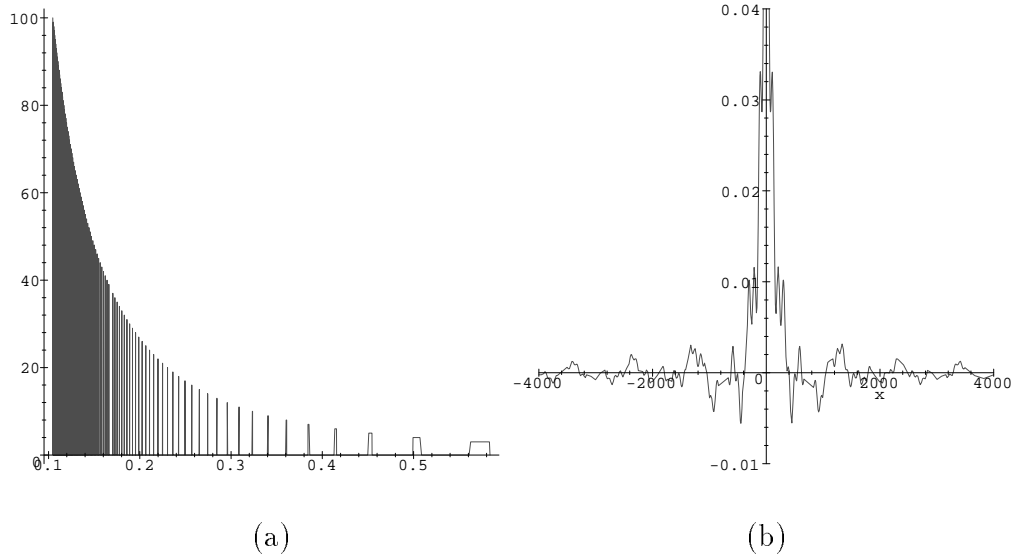
$$\int_{M_2} |\hat{\psi}| \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \leq \int_{M_2} \frac{1}{a^2} da < \infty.$$

Insgesamt folgt die Morlet-zulässig von  $\psi$ . □

**Korollar 1.46** *Sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$  mit  $x\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ .*

*Weiter gelte  $\int_H \left( \hat{\psi} \circ p_\gamma \right) (h) d\mu_H(h) \neq 0$ .*

*Dann folgt aus zulässig auch Morlet-zulässig.*



**Abbildung 1.1: Morlet-zulässige, nicht zulässige Funktion.** Abbildung zu Beispiel 1.44 für eine reelle Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , welche Morlet-zulässig, aber nicht zulässig ist. (a) Die Fourier-Transformierte  $\hat{\psi}$ . Der Träger ist kompakt. (b) Eine Approximation der Funktion als Überlagerung der Fourier-Transformierten der drei größten charakteristischen Funktionen. Der Parameter ist  $\alpha = 0.49$ . Die Funktion  $\psi$  ist analytisch. Anhand der x-Achse erkennt man deutlich die schlechte Lokalisierung von  $\psi$ . Bei besserer Approximation wandern die Nullstellen von  $\psi$  gegen unendlich.

**BEWEIS** Nach Lemma A.1 ist  $\hat{\psi}$  differenzierbar. Insbesondere ist  $\hat{\psi}$  in einer Nullumgebung Lipschitz mit Exponent größer Null.  $\square$

Für die Konstruktion eines Gegenbeispiels ist also das Verhalten für  $a$  um Null interessant. Hier folgt jedoch aus Zulässigkeit von  $\psi$  sofort  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Damit sind alle Funktionen aus  $L^2([0, 1], \frac{da}{a}) \setminus L^1([0, 1], \frac{da}{a})$  als Beispiel für eine nicht Morlet-zulässige, zulässige Funktion geeignet. Ein explizites Beispiel ist

$$\hat{\psi}(\omega) := \frac{1}{|\ln(\omega)|} \chi_{[0,1]}(\omega).$$

# Kapitel 2

## Diskretisierung

Für eine praktische Implementation der Wavelet-Transformation ist diese zu diskretisieren. Dabei sollen wichtige Eigenschaften gerettet werden. Die Forderung nach einer Rekonstruktion aus diskreten Werten führt auf den Begriff des Frames, der in Abschnitt 2.2 eingeführt wird. Der Wunsch nach einer schnellen Implementation führt zur Multiskalenanalyse. Diese wird in Abschnitt 2.1 stellvertretend für auf der Wavelet-Transformation aufbauende Basistransformationen kurz vorgestellt. In Abschnitt 2.3 wird eine semidiscrete Transformation vorgestellt sowie der darauf aufbauende Mallat-Algorithmus als Beispiel für redundante Pyramidenalgorithmen.

Sowohl für die Multiskalenanalyse als auch den Mallat-Algorithmus wird der Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation herausgearbeitet. Beide Transformationen haben für verschiedene Anwendungen große Verbreitung gefunden. Es werden speziell die Vor- und Nachteile dieser Diskretisierungen für die Bildanalyse diskutiert. Diese Diskussion bildet die Motivation für die im nächsten Kapitel entwickelte neue Diskretisierung. In Abschnitt 6.5 wird diese Diskussion im Zusammenhang mit der Hervorhebung von Mikrokalk in Mammographien erneut aufgegriffen.

### 2.1 Multiskalenanalyse

In diesem Abschnitt werden die Multiskalenanalyse (MSA) und die darauf aufbauende schnelle Wavelet-Transformation kurz vorgestellt. Bei der Multiskalenanalyse wird ein anderer Ansatz als bei der kontinuierlichen Transformation verfolgt. Hier steht der Basiswechsel im Mittelpunkt, also eine redundanzfreie Transformation, die aus dem Blickwinkel der Approximationstheorie beleuchtet wird. Dieser Blickwinkel ist für Anwendungen wie Kompression und Rauschfilterung wertvoll, ist aber nicht für eine präzise Signal-Analyse geeignet.

Die Multiskalenanalyse kann aber als spezielle Diskretisierung der kontinuierlichen Transformation aufgefasst werden. Zentraler Vorteil der Multiskalenanalyse ist ein schneller Algorithmus für die Berechnung der Multiskalenanalyse, die diskrete Wavelet Transformation. Wesentlich ist dabei die Existenz einer Skalierungsgleichung, die ein iteratives

Berechnungsschema erlaubt. Der Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation erlaubt, Ideen dieses Algorithmus auch auf andere, für die Signalanalyse besser geeignete Diskretisierungen zu übertragen. So baut der später vorgestellte Mallat-Algorithmus ebenfalls auf einer Skalierungsgleichung auf. In Abschnitt 3.5 wird später ein approximativer Algorithmus zur Berechnung der Wavelet-Transformation vorgestellt, der dieses Schema in einem allgemeineren Kontext erlaubt.

**Definition 2.1** *Eine Multiskalenanalyse des  $L^2(\mathbb{R})$  ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$*

$$\{0\} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

so dass gilt

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} &= L^2(\mathbb{R}), \\ \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m &= \{0\}, \quad \text{sowie} \\ f \in V_m &\Leftrightarrow \mathcal{D}_{2^{-m}} f \in V_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Weiter existiert eine Funktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , die **Skalierungsfunktion**, deren ganzzahlige Translate eine **Riesz-Basis** von  $V_0$  erzeugen, d. h.

$$V_0 = \overline{\text{span}\{T_k \varphi; k \in \mathbb{Z}\}}^{L^2(\mathbb{R})}$$

und es existieren Konstanten  $A, B > 0$ , mit

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k T_k \varphi \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

für alle  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ .

Wir definieren die Räume  $W_m$  als orthogonales Komplement von  $V_m$  in  $V_{m-1}$ :

$$V_{m-1} = W_m \oplus V_m.$$

Dann gilt  $V_m = \bigoplus_{j \leq m+1} W_j$ , und damit  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ . Die Orthogonalprojektion von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $V_m$  sei  $P_m$ , die Orthogonalprojektion auf  $W_m$  sei  $Q_m$ . Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  lässt sich zerlegen durch

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = P_m f + \sum_{j=-\infty}^m Q_j f.$$

Es gilt  $P_{m-1} = Q_m + P_m$  bzw.  $Q_m = P_{m-1} - P_m$ . Wie sagen  $P_m f$  ist der Anteil von  $f$  auf der **Skala**  $V_m$ .  $Q_m f \in W_m$  enthält die **Details**, die  $P_{m-1} f$  von  $P_m f$  unterscheidet.

In Abschnitt 3.3 wird ein kontinuierliches Analogon vorgestellt, mit dem die Begriffe Skala und Detail auf die kontinuierliche Transformation übertragen werden.

**Lemma 2.2** [LMR94, 2.2.3] Die Skalierungsfunktion  $\varphi$  erfüllt eine **Skalierungsgleichung**. Es existiert eine Folge  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  mit

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

im  $L^2$ -Sinn.

Die Fourier-Transformierte der Skalierungsgleichung lautet

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{h}(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2),$$

mit  $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$ .

Lemma 2.2 folgt aus Formel (2.1).

**Satz 2.3** [LMR94, 2.2.10] Sei  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  eine Multiskalenanalyse, die von der orthogonalen Skalierungsfunktion  $\varphi \in V_0$  erzeugt wird. Die Funktion  $\psi \in V_{-1}$ , definiert durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

wobei  $g_k := (-1)^k h_{1-k}$ , besitzt folgende Eigenschaften

- (i)  $\{D_{2^m} T_k \psi; k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $W_m$ .
- (ii)  $\{D_{2^m} T_k \psi; k, m \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (iii) Die Funktion  $\psi$  ist ein Wavelet, d. h. eine nach (1.3) zulässige Funktion mit  $c_k = 2 \ln 2$ .

Als **diskrete Wavelet-Transformation (DWT)** von  $f \in L^2(\mathbb{R})$  bezeichnen wir die Koeffizienten von  $f$  in dieser Basis, also die Abbildung

$$f \mapsto (\langle f, D_{2^m} T_k \psi \rangle)_{m, k \in \mathbb{Z}}.$$

Die Skalierungsgleichung (2.2) ist die Grundlage für schnelle Algorithmen. Sie erlaubt, die Rechnung auf den Koeffizienten  $g_n, h_n$  durchzuführen. Die Schwierigkeit besteht darin, Lösungen für die Skalierungsgleichung (2.2) anzugeben. Es gibt verschiedene Varianten dieses Konzeptes, wie z. B. biorthogonale Wavelets oder Wavelet-Packets, denen jedoch das Ziel einer redundanzfreien, an einer Basis orientierten Transformation gemein ist. Weitere Details finden sich z. B. in [Dau92, LMR94].

## Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation

Die eindimensionale MSA kann als Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation aufgefasst werden. Dies beruht auf der Orthonormalbasis in Satz 2.3 (ii), konstruiert aus einer Teilmenge des Orbits  $U_g\psi$  eines Wavelets  $\psi$ . Dies erlaubt, den Algorithmus zur Berechnung der DWT auch für andere Diskretisierungen zu nutzen.

**Satz 2.4** [Sai97] *Seien die Bezeichnungen wie in Abschnitt 1.4 festgelegt, d. h.  $E$  ist eine Menge,  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum,  $u : E \rightarrow \mathcal{H}$  eine Abbildung und  $H_K$  ein Hilbert-Raum über  $E$  mit durch  $u$  und (1.7) definierten reproduzierenden Kern  $K$ .*

*Sei  $\{u(p_i)\}_{i \in I}$ ,  $p_i \in E$  ein vollständiges Orthonormalsystem von  $H_K$ , wobei  $I$  eine Indexmenge ist. Dann gilt für alle  $F \in H_K$  der Abtastsatz*

$$F(p) = \sum_{i \in I} F(p_i) K(p, p_i).$$

BEWEIS Für alle  $F \in H_K$  gilt die Darstellung

$$F(p) = \langle f, u(p) \rangle_{\mathcal{H}}, \text{ für ein } f \in \mathcal{H}.$$

Der Beweis folgt mit der Parseval-Plancherel Identität:

$$F(p) = \sum_{i \in I} \langle F(p), u(p_i) \rangle_{\mathcal{H}} u(p_i) = \sum_{i \in I} \langle f, u(p_i) \rangle_{\mathcal{H}} \overline{\langle u(p_i), u(p) \rangle_{\mathcal{H}}} = \sum_{i \in I} F(p_i) K(p, p_i).$$

□

Der Satz kann als Verallgemeinerung des Abtastsatzes von Whittaker, Kotel'nikov und Shannon aufgefasst werden. Der dort auftretende Raum  $PW^\pi$  der bandbeschränkten Funktionen ist ein Hilbert-Raum mit dem reproduzierenden Kern  $K(x, y) = \text{sinc}(x - y)$ , die Funktionen  $u(p_n)(y) := \text{sinc}(n - y)$  bilden eine Orthonormalbasis. Angewendet auf die Wavelet-Transformation erhalten wir den folgenden

**Satz 2.5** [Sai97, Satz 3.5.6] *Das Bild  $WT_\psi(L^2(\mathbb{R}))$  der CWT zur Gruppe „ $ax+b$ “ über  $L^2(\mathbb{R})$  und einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , welches eine Multiskalenanalyse erzeugt, ist charakterisiert durch:*

*Für alle Folgen  $c_{j,k} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$  existiert genau eine Funktion  $F(A, z) \in H_K$ , mit*

$$c_{j,k} = F(2^j, 2^j k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

*und es gilt*

$$F(A, z) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} K((A, z), (2^j, 2^j k)).$$

*Dabei bezeichnet  $K$  den reproduzierenden Kern der Wavelet-Transformation.*

BEWEIS Der Beweis folgt aus Satz 2.4. □

Wir sehen erneut deutlich die Redundanz der kontinuierlichen Wavelet-Transformation.

## Mehrdimensionale Multiskalenanalyse

Die Multiskalenanalyse auf  $\mathbb{R}^m$  wird analog zu Definition 2.1 erklärt. Statt der Dilatation in (2.1) wird nun eine Dilatationsmatrix  $A \in GL(m, \mathbb{R})$  betrachtet, mit

$$f \in V_m \Leftrightarrow f(A^m \cdot) \in V_0.$$

Die Dilatationsmatrix soll in jeder Richtung strecken, d.h.  $|\sigma(A)| > 1$  und innerhalb ganzzahliger Gitter operieren, also  $A(\mathbb{Z}^m) \subset \mathbb{Z}^m$ . Man kann zeigen:

**Satz 2.6** [LMR94, Satz 2.2.15] Sei  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  eine MSA mit Dilatationsmatrix  $A$ . Dann existieren  $|\det(A)| - 1$  Wavelets  $\psi_1, \dots, \psi_{|\det(A)|-1} \in V_{-1}$ , die eine ONB des orthogonalen Komplements  $W_0$  von  $V_0$  in  $V_{-1}$  erzeugen, d.h.

$$\{\psi_{j,m,k} := |\det A|^{-m/2} \psi_j(A^{-m} \cdot -k); j = 1, \dots, |\det A| - 1, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^m\}$$

ist eine ONB des  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Lösungen der entsprechenden mehrdimensionalen Skalierungsgleichungen sind schwer zu finden. Für diagonale Dilatationsmatrizen lassen sich Wavelets als Tensorprodukt eindimensionaler Wavelets erzeugen. Der Nachteil für die Bildanalyse ist die Bevorzugung der Ordinatenrichtungen. Dies wird anhand von Beispielen an Mammographien in Abschnitt 6.9 gezeigt.

### Fazit: MSA für Bildanalyse?

Die Idee der Multiskalenanalyse ist, durch „kritisches“ Abtasten eine ONB, eine redundanzfreie Transformation zu erzeugen. Dieser Ansatz eignet sich hervorragend für die Datenkompression, wie zahlreiche Anwendungen belegen.

Nicht-redundanz bringt für die Bildanalyse aber keine Vorteile, sondern steht eher im Widerspruch zu dem Ziel, möglichst präzise Detailinformationen zu generieren. Für die Bildanalyse benötigen wir eine translationskovariante Transformation. Bei der DWT sind nur die Räume  $W_i$  translationskovariant, nicht die Transformation als Ganzes. Das dyadische Gitter ist nicht an bestimmte Skalenbereiche anpassbar. Die mehrdimensionale Verallgemeinerung folgt keiner geometrischen Anschauung, der Ansatz als Tensorprodukt führt zur Bevorzugung gewisser Richtungen.

## 2.2 Frames

Ziel ist, die kontinuierliche WT zu diskretisieren, z.B. indem nur eine Teilmenge von  $WT_\psi(g)$  auf einer abzählbaren Teilmenge  $\Gamma$  von  $G$  betrachtet wird. Eine zentrale Forderung an so eine Menge  $\Gamma$  ist, dass die Funktion sich aus der diskreten Menge rekonstruieren lässt. Die weitere Forderung nach Translationskovarianz führt auf redundante Transformationen.

Für solche redundanten, diskreten Transformationen beantwortet das Konzept des Frames die Frage nach der Invertierbarkeit. Frames wurden von Duffin und Schaefer [DS52] entwickelt.

Sei  $\mathcal{H}$  Hilbert-Raum,  $\Gamma \subset \mathbb{Z}$  Indexmenge und  $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma} \subset \mathcal{H}$ . Es geht um die Frage, wann die Koeffizientenabbildung

$$f \mapsto \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \Gamma}$$

umkehrbar, dass heißt, der zugehörige Operator beschränkt invertierbar ist.

**Definition 2.7** Die Folge  $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma}$  ist ein **Frame** von  $\mathcal{H}$ , falls Frame-Schranken  $A, B > 0$  existieren, so dass

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (2.4)$$

Der Operator  $F : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,  $Ff(n) := \langle f, \varphi_n \rangle$  heißt **Frame-Operator**. Gilt  $A = B$ , so heißt der Frame **fest**.

Der Operator  $F$  ist offensichtlich linear und weiter beschränkt aufgrund der rechten Abschätzung. Die linke Abschätzung garantiert Injektivität und damit Invertierbarkeit von  $F$  auf seinem Bild  $\text{Im}(F) \subset l^2(\Gamma)$ .

Ist  $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma}$   $\omega$ -linear unabhängig, so heißt der Frame **minimal**. Er ist dann **exakt** bzw. eine **Riesz-Basis**. In diesem Fall ist  $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma}$  topologisch isomorph zu einer Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ .

Falls  $\{\varphi_n\}_{n \in \Gamma}$   $\omega$ -linear abhängig ist, ist  $\text{Im}(F)$  echter Teilraum von  $l^2(\Gamma)$  ([Mal98, Prop 5.1]). Dann existieren unendlich viele Linksinverse  $F^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $F^{-1}Ff = f$ . Jenes eindeutige Inverse  $\tilde{F}^{-1}$ , welches  $\text{Im}(F)^\perp$  auf 0 abbildet heißt **Pseudoinverse** von  $F$  und ist gegeben durch

$$\tilde{F}^{-1} := (F^*F)^{-1}F^*.$$

Die Pseudoinverse ist ein beschränkter Operator mit  $\|\tilde{F}^{-1}\| \leq (\sqrt{A})^{-1}$ . Zur Pseudoinversen existiert ein **dualer Frame**:

**Satz 2.8** [Mal98, Theorem 5.2] Sei  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Frame mit Frame-Schranken  $A$  und  $B$ . Definiere  $\tilde{\varphi}_n := (F^*F)^{-1}\varphi_n$ . Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{H}$

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2,$$

sowie

$$f = \tilde{F}^{-1}Ff = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n.$$



**Bemerkung 2.9** Diese Rekonstruktion ist analog zum kontinuierlichen Fall. Dort erlaubt die Redundanz der CWT verschiedene Rekonstruktionswavelets, aber nur die Wahl von  $\psi$  führt auf die eindeutige Rekonstruktion mit dem adjungierten Operator, der implizit eine Orthogonalprojektion von  $L^2(G)$  auf  $\text{Im}(\mathcal{WT})$  ist (Formel (1.1)).

Aufgrund der allgemeineren Geometrie eines Frames, ist der duale Frame im allgemeinen unterschiedlich vom analysierenden Frame. Der inverse Frame wird durch iterative Verfahren, wie z.B. dem konjugierten Gradientenverfahren oder dem extrapolierten Richardson Algorithmus, berechnet, vgl. [Mal98]. Die Konvergenzrate dieser Verfahren hängt von dem Verhältnis  $B/A$  ab. Die Verfahren konvergieren um so schneller, je näher dieser Wert bei 1 liegt. Nur im Fall eines festen Frames gilt  $\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{A}\varphi_n$ . Die Berechnung des dualen Frames zu einem nicht-festen Frame ist also numerisch aufwendig, weshalb feste Frames von Vorteil sind.  $\square$

Die Redundanz in Frames ist oft Absicht und wird benutzt, um durch Operationen auf den Koeffizienten z.B. Rauschen zu minimieren. Dabei spielt die Rekonstruktion, und damit die Projektion von  $l^2(\Gamma)$  auf das Bild  $\text{Im}(F)$  des Frames eine wichtige Rolle. Der duale Frame ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaft.

**Proposition 2.10** [Mal98, Proposition 5.2] Sei  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Frame für  $\mathcal{H}$  und  $F$  der zugehörige Frame-Operator. Weiter sei  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  der duale Frame. Der Operator  $P : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$

$$Px(n) := F\tilde{F}^{-1}x(n) = \sum_{p \in \Gamma} x(p)\langle \tilde{\varphi}_p, \varphi_n \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.5)$$

ist eine Orthogonalprojektion von  $l^2(\Gamma)$  auf  $\text{Im}(F)$ .

**Bemerkung 2.11** Auch hier tritt ein Kern  $K(p, n) := \langle \tilde{\varphi}_p, \varphi_n \rangle$  auf. Das Bild  $\text{Im}(F)$  ist durch eine reproduzierende Eigenschaft charakterisiert: Es ist  $y(n)_{n \in \Gamma} \in \text{Im}(F)$  genau dann, wenn gilt

$$y(n) = \sum_{p \in \Gamma} y(p)\langle \tilde{\varphi}_p, \varphi_n \rangle.$$

$\square$

Der Begriff des Frame ist für unsere Zwecke zu allgemein. Ziel sind Frames, die als Diskretisierung einer kontinuierlichen Wavelet-Transformation aufgefasst werden können. Wir verwenden dazu später eine diskrete Teilmenge des Wavelet-Orbits  $U_G\psi$ , die möglichst durch eine diskrete Untergruppe von  $G$  erzeugt ist.

**Definition 2.12** Als **Wavelet-Frame** zur Wavelet-Transformation über der Gruppe  $G$  bezeichnen wir einen Frame, der als Orbit  $\mathcal{U}_g\psi$ ,  $g \in \Gamma$ , der Einschränkung der Operation der Gruppe  $G$  auf eine (diskrete) Teilmenge  $\Gamma$  auf einer zulässigen Funktion  $\psi$  entsteht. Für  $G = „ax+b“$  wird der Frame auch **affiner Frame** genannt.

## Semidiskrete Frames

Die Menge  $\Gamma$  muss nicht diskret sein. Wir werden im folgenden Frames zu  $\Gamma := \mathbb{R}^m \times A$  mit einer diskreten Menge  $A$  betrachten. In diesem Fall zerfällt die Integration in Summation über den diskreten Anteil  $A$  sowie die kontinuierliche Indexmenge  $\mathbb{R}^m$ . Die Frame-Bedingung lautet dann

$$A\|f\|^2 \leq \sum_A \int_{\mathbb{R}^m} |\langle f, \varphi_{b,a} \rangle|^2 db \leq B\|f\|^2. \quad (2.6)$$

Der dadurch definierte Frame-Operator  $F : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Gamma) := l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times A))$  hat die gleichen Eigenschaften wie oben. Resultate über die Pseudoinverse und den dualen Frame gelten analog, wobei Summation über  $\Gamma$  wie oben zu interpretieren ist.

## Verschiebbare Transformation

Die Vertauschungsoperator-Eigenschaft, insbesondere die Translationskovarianz der kontinuierlichen Transformation soll auch für den Frame gelten, d. h.  $T_b \circ \mathcal{WT} = \mathcal{WT} \circ T_b$ , wobei  $T_b$  kanonisch auf  $L^2(G)$  operiert. Dies ist begründet durch die in der Bildanalyse wichtige Rolle der Translationskovarianz einer Transformation, die sich aus der Forderung ergibt, dass das Ergebnis eines Analyse-Algorithmus unabhängig vom Koordinatenursprung des Bildes sein soll. Dies wird durch äquidistante Abtastung der Translationen, unabhängig von der Skala, erreicht und führt zwingend auf eine redundante Transformation.

**Lemma 2.13** *Sei  $A$  diskrete Teilmenge der Dilatationsgruppe  $H$ . Dann gilt:*

*Genau dann ist die Einschränkung der Wavelet-Transformation auf das Gitter  $D \subset \mathbb{R}^m \times A$  translationskovariant bezüglich Translationen aus  $\mathbb{Z}^m$ , wenn für jede Skala  $a \in A$  eine Menge  $B_a \subset \mathbb{R}^m$  existiert, so dass*

$$D = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B_a} \{(b + \mathbb{Z}^m) \times a\}.$$

**BEWEIS** Die kontinuierliche Wavelet-Transformation vertauscht mit Translation. Für jedes feste  $h \in D$  folgt damit, dass mit einem Punkt  $(b, a) \in \mathbb{R}^m \times A$  auch das Gitter  $(b + \mathbb{Z}^m) \times a$  in  $D$  liegen muss.  $\square$

Da die MSA mit  $A = \{2^j, j \in \mathbb{N}\}$  und  $B_a \equiv \{0\}$  echt in ein solches Gitter eingebettet werden kann, führt diese Einschränkung für affine Wavelets zwingend auf eine redundante Transformation.

## Implementation im Fourier-Raum

Die spezielle Gestalt eines durch die Operation der Translation erzeugten, translationskovarianten Frames erlaubt eine effiziente Implementation. Betrachten wir dazu erst die

kontinuierliche Transformation. Die Wavelet-Transformation kann für zulässiges  $\psi \in \mathcal{H}_V$  als in der Dilatationsgruppe  $H$  indizierte Familie von Faltungen aufgefasst werden,

$$\mathcal{WT}_\psi f(g) = f * \pi_h \tilde{\psi}(b), \quad g = (h, b).$$

Die Fourier-Transformation diagonalisiert die Faltung, was zu der Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{WT}_\psi f(g) &= \langle \hat{f}, \widehat{T_b \pi_h \psi} \rangle = \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \hat{f}(\omega) \det(h)^{1/2} \overline{\hat{\psi}(\omega h)} e^{ib\omega} d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{f}(\omega) \det(h)^{1/2} \overline{\hat{\psi}(\omega h)} \right) (b) \end{aligned}$$

führt. Dies legt, bei äquidistanter Diskretisierung der Translation, eine Implementation im Fourier-Raum nahe. Die Funktion  $f$  wird dann mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation (FFT) diskret Fourier-transformiert. Für jede Dilatation  $h \in H$  wird das entsprechend skalierte Wavelet im Fourier-Bereich multipliziert und die inverse Fourier-Transformation berechnet. Die Komplexität einer Implementation entspricht damit, für eine feste Zahl von Skalen  $h$ , der der schnellen Fourier-Transformation.

Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass der Algorithmus, im Gegensatz zu Pyramidenalgorithmen, von der Diskretisierung der Dilatationsgruppe unabhängig ist. Wichtig ist nur die translationskovariante Struktur, also die äquidistante Diskretisierung der Translationen, um die Fourier-Transformation nutzen zu können. Wie später in Abschnitt 6.5 ausgeführt wird, ist Translationskovarianz eine notwendige Eigenschaft einer für die präzise Bildanalyse geeigneten Transformation. Eine Rekonstruktion lässt sich analog mit dem dualen Frame implementieren.

Bei naiver Diskretisierung erhält man keine exakte Rekonstruktion. In Abschnitt 6.6 wird ein neuer Algorithmus vorgestellt, der auch für die Rechnung mit FFT eine exakte Rekonstruktion erlaubt. Dieser basiert auf der in Kapitel 3 eingeführten integrierten Wavelet-Transformation.

Ein Problem für die praktische Anwendung ist, dass man bei Anwendung der diskreten Fourier-Transformation von einem periodischen Signal ausgeht. Die Periodisierung führt aber zu Randeffekten und damit Artefakten. Wenn das Wavelet gut lokalisiert ist, ist dieser Effekt gering. Er lässt sich durch geeignete Fortsetzung der Funktion auf ein größeres Definitionsgebiet einschränken. Bei der Anwendung für die Bildanalyse werden die Werte der Transformierten am Rand nicht für die Auswertung herangezogen.

## 2.3 Semidiskrete Wavelet-Transformation

Ziel dieses Abschnitts ist eine translationskovariante diskrete Wavelet-Transformation. Dazu wird das Problem der Diskretisierung in zwei Schritte aufgetrennt: In Abschnitt 2.3.1 wird die Dilatationsgruppe  $H$  diskretisiert. Die Translationsgruppe  $\mathbb{R}^m$  bleibt kontinuierlich, wir erhalten somit semidiskrete Wavelet-Frames für  $G = \mathbb{R}^m \times H$ .

Im folgenden Abschnitt 2.3.2 wird die Diskussion auf die Gruppe „ $ax + b$ “ eingeschränkt und die Translation äquidistant diskretisiert. Dies führt auf den Mallat-Algorithmus, der

vorgestellt wird. Abschnitt 2.3.3 zeigt schließlich die Konstruktion des zweidimensionalen Mallat-Algorithmus. Dieser unterscheidet sich deutlich von der MSA, da er nicht „von unten“, als Tensorprodukt der eindimensionalen MSA, sondern „von oben“, als Diskretisierung der zweidimensionalen CWT über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation, konstruiert wird.

### 2.3.1 Diskretisierung der Skalen

In diesem Abschnitt sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ , wobei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Untergruppe ist.  $V \subset \widehat{\mathbb{R}^m}$  sei offener  $H$ -Orbit und  $U_g = T_b \pi_h$  eine quadratintegrierbare Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H}_V \subset L^2(\mathbb{R}^m)$ . Vergleiche auch Abschnitt 1.2.

**Definition 2.14** Sei  $\tilde{A}$  eine nicht leere, abzählbare Teilmenge der Dilatationsgruppe  $H$ . Wir bezeichnen die Einschränkung

$$\mathcal{WT}_\psi^D : f \mapsto \{ \langle f, T_b \pi_a \psi \rangle \}_{b \in \mathbb{R}^m, a \in \tilde{A}}$$

der kontinuierlichen Wavelet-Transformation  $\mathcal{WT}_\psi f$  auf die Menge  $\mathbb{R}^m \times \tilde{A}$  als **semidiscrete Wavelet-Transformation**.

Die Diskretisierung erfolgt durch Abtasten der kontinuierlichen Wavelet-Koeffizienten, wie es auch, vgl. Satz 2.5, bei der DWT der Fall ist.

Im eindimensionalen erhalten wir mit geometrisch diskretisierter Skala  $\tilde{A} := \{2^j; j \in \mathbb{Z}\}$  die von S. Mallat [Mal98] eingeführte **dyadische Wavelet-Transformation** (DyadWT).

Durch die Diskretisierung von Skala und Rotation werden Bedingungen an das Wavelet notwendig, damit die Transformation weiterhin injektiv und durch einen beschränkten Operator invertierbar bleibt. Beide Punkte klärt der folgende Satz.

**Satz 2.15** Sei  $\tilde{A}$  eine nicht leere, abzählbare Teilmenge der Dilatationsgruppe  $H$ . Falls zu  $\psi \in \mathcal{H}_V$  Konstanten  $A, B > 0$  existieren mit

$$A \leq \sum_{a \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(\omega a)|^2 \leq B \quad \text{für fast alle } \omega \in V, \quad (2.7)$$

dann gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_V$

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{a \in \tilde{A}} \frac{1}{|\det(a)|} \|\mathcal{WT}_\psi^D f(\cdot, a)\|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (2.8)$$

Erfüllt weiter  $\chi \in \mathcal{H}_V$  die Bedingung

$$\sum_{a \in \tilde{A}} \overline{\hat{\psi}(\omega a)} \hat{\chi}(\omega a) = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in V, \quad (2.9)$$

dann gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_V$

$$f = \sum_{a \in \tilde{A}} \frac{1}{|\det(a)|} \mathcal{WT}_\psi^D f(\cdot, a) * \pi_a \chi, \quad \text{in } \mathcal{H}_V. \quad (2.10)$$

**BEWEIS** Für den eindimensionalen affinen Fall  $H = \mathbb{R}_+^*$  mit dyadischer Diskretisierung  $\tilde{A} = \{2^j, j \in \mathbb{Z}\}$  findet sich ein Beweis in [Mal98, Theorem 5.11]. Analog gilt für die Fourier-Transformierte von  $f_a(u) := \mathcal{WT}_\psi f(u, a)$  nach  $u$ :

$$\hat{f}_a(\omega) = \hat{f}(\omega) |\det(a)|^{1/2} \overline{\hat{\psi}(\omega a)}, \quad \text{für fast alle } \omega \in V. \quad (2.11)$$

Multiplikation von (2.7) mit  $|\hat{f}(\omega)|^2$  ergibt

$$A |\hat{f}(\omega)|^2 \leq \sum_{a \in \tilde{A}} |\det(a)|^{-1} |\hat{f}_a(\omega)|^2 \leq B |\hat{f}(\omega)|^2 \quad \text{für fast alle } \omega \in V.$$

Integriert man jede Seite der Ungleichung über  $V$  und wendet die Parseval-Gleichung an, so folgt (2.8). Multipliziert man analog Formel (2.9) mit  $\hat{f}(\omega)$  für fast alle  $\omega \in V$  und setzt (2.11) ein, so folgt (2.10).  $\square$

Wir kommen in Kapitel 3 im Zusammenhang mit der dort definierten integrierten Wavelet-Transformation auf diesen Satz zurück. Dort wird eine neue Variante gezeigt (Satz 3.45 bzw. 4.7), bei der keine Bedingungen an das Wavelet notwendig sind.

Im allgemeinen folgt aus (2.7) bereits die Zulässigkeitsbedingung für ein kontinuierliches Wavelet. Wir formulieren diese bekannte Aussage in zwei Varianten im allgemeinen Kontext:

**Lemma 2.16** (i) Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$ . Sei  $\tilde{A}$  eine diskrete Untergruppe von  $H$  und  $F$  kompakter Fundamentalbereich zu  $H/\tilde{A}$  (vgl. Definition 4.6). Es existieren Konstanten  $A, B > 0$  mit

$$A \leq \sum_{a \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(\omega a)|^2 \leq B \quad \text{für fast alle } \omega \in V. \quad (2.12)$$

Dann ist  $\psi$  zulässig.

(ii) Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes (SO(m) \times \mathbb{R}_+^*)$  und  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Sei die Diskretisierung der Dilatation gegeben durch eine streng monoton steigende Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} := \tilde{A} \subset \mathbb{R}_+^*$ . Es gelte weiter  $\sup\{a_{n+1}/a_n; n \in \mathbb{Z}\} < \infty$ . Es existieren Konstanten  $A, B > 0$  mit

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega a_n)|^2 \leq B \quad \text{für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m} \setminus \{0\}, \quad (2.13)$$

Dann ist  $\psi$  zulässig.

BEWEIS (i) Sei  $\gamma \in V$ .

$$\begin{aligned}
\int_H |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(h) d\mu_H(h) &= \sum_{a \in \tilde{A}} \int_{Fa} |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(h) d\mu_H(h) \\
&= \sum_{a \in \tilde{A}} \int_F |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(ha) d\mu_H(h) \\
&\leq \int_F \left( \sum_{a \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(\gamma ha)|^2 \right) d\mu_H(h) \\
&\stackrel{(2.12)}{\leq} B\mu_H(F) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(ii) Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Für Zulässigkeit ist nur die Dilatation  $\mathbb{R}_+^*$  wesentlich. Wir vernachlässigen daher in der folgenden Rechnung die Integration über  $SO(m)$ . Sei  $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}^m} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{a_n}^{a_{n+1}} |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(a) \frac{da}{a} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_1^{\frac{a_{n+1}}{a_n}} |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(aa_n) \frac{da}{a} \\
&\leq \int_1^{\sup\{\frac{a_{n+1}}{a_n}; n \in \mathbb{Z}\}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}|^2 \circ p_\gamma(aa_n) \right) \frac{da}{a} \\
&\stackrel{(2.13)}{\leq} B \sup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n}; n \in \mathbb{Z} \right\} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

Insbesondere ist die dyadische Wavelet-Transformation immer eine Einschränkung der kontinuierlichen Transformation.

Die Redundanz der semidiskreten Transformation führt, ähnlich wie bei der CWT, dazu, dass für die Rekonstruktion mehrere Rekonstruktionswavelets zur Verfügung stehen. Formel (2.9) ist das diskrete Analogon zur gemischten Zulässigkeitsbedingung.

Die zu  $\mathcal{WT}_\psi^D$  assoziierte Familie von Faltungsoperatoren  $(\varphi_a)_{a \in \tilde{A}}$  auf  $\mathcal{H}_V$ ,

$$\varphi_a(f)(b) := \mathcal{WT}_\psi^D f(b, a), \quad a \in \tilde{A}$$

kann unter den Voraussetzungen des Satzes als ein semidiskreter Frame-Operator in den Raum  $l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \tilde{A}))$  aufgefasst werden, d. h.  $\mathcal{WT}_\psi^D : \mathcal{H}_V \rightarrow l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \tilde{A}))$ , vgl. auch Abschnitt 2.3.1 Gleichung 2.8 ist genau das semidiskrete Analogon zu 2.4.

Über die Pseudoinverse erhält man den dualen Frame als eine Familie von Faltungsoperatoren, die von dem dualen Wavelet  $\chi \in \mathcal{H}_V$  erzeugt wird. Offensichtlich erfüllt

$$\hat{\chi}(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{a \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2}, \quad \omega \in V \quad (2.14)$$

die Bedingung (2.9). Um zu zeigen, dass dies der duale Frame ist, genügt es zu zeigen, dass Funktionen aus  $\text{Im}(\mathcal{WT})^\perp$  auf Null abgebildet werden. Sei also  $F \in \text{Im}(\mathcal{WT})^\perp$ , d. h. es gilt für alle  $f \in \mathcal{H}$ :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} F(b, a) \overline{\langle f, \mathcal{U}_{(b,a)}\psi \rangle_{\mathcal{H}}} db = 0.$$

Mit der Parseval-Formel bezüglich  $\mathbb{R}^m$  bedeutet dies

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} \hat{F}(\omega, a) \widehat{f(\omega) \pi_a \overline{\psi(\omega)}} d\omega = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (2.15)$$

Für obiges  $\chi$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} F(b, a) \mathcal{U}_{(b,a)}\chi(x) db &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} F(b, a) T_x \pi_a \chi(-b) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} \hat{F}(\omega, a) E_x(\omega) \overline{\pi_a \widehat{\chi(\omega)}} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{a \in \tilde{A}} \hat{F}(\omega, a) \frac{E_x(\omega)}{\sum_{a' \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(a'\omega)|^2} \overline{\pi_a \widehat{\psi(\omega)}} d\omega \end{aligned} \quad (2.16)$$

Der Faktor  $\frac{E_x(\omega)}{\sum_{a' \in \tilde{A}} |\hat{\psi}(a'\omega)|^2}$  ist zwar keine  $L^2$ -Funktion, aber von  $a$  unabhängig. Er kann durch eine Partition der Eins aus  $L^2$ -Funktionen dargestellt werden, deren jeder Summand in (2.16) aufgrund (2.15) Null ist. Damit ist gezeigt, dass  $\chi$  genau den durch die Pseudoinverse definierten dualen Frame aufspannt.

**Bemerkung 2.17** Es gibt einen alternativen Ansatz einer translationskovarianten Transformation, die auf den lokalen Betrags-Maxima in den Skalen basiert und von S. Mallat und S. Zhong [MZ92] entwickelt wurde. Für diese gibt es eine iterative Rekonstruktion durch alternierende Projektionen. Um die lokalen Extrema zu bestimmen, ist allerdings die Berechnung der ganzen Skala notwendig, somit ist kein schneller Algorithmus zu erwarten. Von sehr großer Bedeutung ist aber, dass die lokalen Betrags-Maxima – zumindest für eine große Klasse von Funktionen – bereits sämtliche für die Rekonstruktion wesentliche Information codieren. Dies motiviert verschiedene Ansätze, die in den folgenden Kapiteln zur digitalen Mammographie untersucht werden.  $\square$

### 2.3.2 Die eindimensionale dyadische Transformation

Einen schnellen Algorithmus zur Implementation der semidiskreten Transformation in Form eines Pyramidenalgorithmus erhält man unter zusätzlichen Forderungen an das Wavelet. Dabei wird der auf der MSA basierende Algorithmus der schnellen Wavelet-Transformation [LMR94] nachgebildet. Dazu wird gefordert, dass eine Skalierungsfunktion existiert sowie die Skalierungsgleichung (2.2) erfüllt wird. Der folgende Algorithmus von S. Mallat und wird auch **Mallat-Algorithmus** genannt. Wir stellen zuerst die eindimensionale Version vor, da hier die Konstruktionsideen deutlich werden. Interessant ist insbesondere die im nächsten Abschnitt folgende Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall, da diese vom Multiskalenansatz abweicht.

Der hier vorgestellte Algorithmus wird in Abschnitt 3.5 aufgegriffen und für die integrierte Wavelet-Transformation auf eine größere Klasse an Wavelets verallgemeinert, die nicht mehr einer Skalierungsgleichung genügen müssen.

Sei die Skala dyadisch diskretisiert, also  $D = \{2^j, j \in \mathbb{Z}\}$  und  $\psi$  ein nach Satz 2.15 zulässiges, sogenanntes **dyadisches Wavelet**. Dieses sei durch eine stetige Skalierungsfunktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  mit  $\hat{\varphi}(0) = 1$  gegeben, welche der Skalierungsgleichung (2.2) genügt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n), \text{ d. h. } \sqrt{2} \hat{\varphi}(2\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \quad \text{sowie} \\ \psi(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n), \text{ d. h. } \sqrt{2} \hat{\psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{\varphi}(\omega),\end{aligned}$$

mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \hat{\mathbb{R}}$ , wobei  $h, g \in l^2(\mathbb{Z})$ , d. h.  $\hat{g}, \hat{h}$  sind Funktionen auf  $L^2([-\pi, \pi])$  die auf  $\mathbb{R}$  periodisch fortgesetzt werden. Wir nehmen weiter an, dass  $g$  und  $h$  endlichen (kompakten) Träger haben, in der Sprache der Signalverarbeitung FIR-Filter (von *finite impulse response*) sind. Damit haben nach [Mal98, Prop. 7.3] auch  $\varphi$  und  $\psi$  kompakten Träger.

Analog sei  $\varphi_{rek} \in L^2(\mathbb{R})$  Skalierungsfunktion für  $\psi_{rek} \in L^2(\mathbb{R})$ , gegeben durch FIR-Filter  $h_{rek}, g_{rek} \in l^2(\mathbb{Z})$ , d. h.

$$\begin{aligned}\varphi_{rek}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{rek}(n) \varphi_{rek}(2x - n), \text{ d. h. } \sqrt{2} \widehat{\varphi_{rek}}(2\omega) = \widehat{h_{rek}}(\omega) \widehat{\varphi_{rek}}(\omega) \quad \text{sowie} \\ \chi(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{rek}(n) \varphi_{rek}(2x - n), \text{ d. h. } \sqrt{2} \widehat{\psi_{rek}}(2\omega) = \widehat{g_{rek}}(\omega) \widehat{\varphi_{rek}}(\omega).\end{aligned}$$

Unter folgender Bedingung an die Folgen  $h, g, h_{rek}, g_{rek}$  sind  $\varphi, \psi, \varphi_{rek}, \psi_{rek}$  perfekte Rekonstruktionsfilter.

**Proposition 2.18** [Mal98, Prop. 5.5] *Seien  $h, g, h_{rek}, g_{rek} \in l^1(\mathbb{Z})$  wie oben durch Skalierungsgleichungen gegeben. Erfüllen ihre Fourier-Transformierten*

$$\overline{\hat{h}(\omega)} \widehat{h_{rek}}(\omega) + \overline{\hat{g}(\omega)} \widehat{g_{rek}}(\omega) = 2 \quad (2.17)$$



für fast alle  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , dann gilt

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{\psi}(2^j \omega)} \widehat{\psi_{rek}}(2^j \omega) = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Wir haben also die Rekonstruktionsbedingung (2.9) aus Satz 2.15 durch eine Bedingung an die Koeffizienten ersetzt.

### Bemerkungen 2.19

- (a) Es bietet sich der Vergleich mit der schnellen Wavelet-Transformation der Multiskalenanalyse an. Filter  $g, h, g_{rek}, h_{rek}$  sind nach M. Vetterli [Mal98, Theorem 7.7] genau dann biorthogonale Wavelet-Filter (*perfect reconstruction filter*) für die DWT, wenn gilt

$$\overline{\widehat{h}(\omega)} \widehat{h_{rek}}(\omega) + \overline{\widehat{g}(\omega)} \widehat{g_{rek}}(\omega) = 2 \quad (2.19)$$

und

$$\overline{\widehat{h}(\omega + \pi)} \widehat{h_{rek}}(\omega) + \overline{\widehat{g}(\omega + \pi)} \widehat{g_{rek}}(\omega) = 0. \quad (2.20)$$

Im Gegensatz zu diesen Bedingungen ist die Voraussetzung für die Rekonstruktionsbedingung (2.18) aus obiger Proposition also schwächer. Die zweite Bedingung (2.20) entsteht bei der DWT durch „Sub-Sampling“, dem Weglassen jedes zweiten Koeffizienten, sie verhindert Aliasing (*aliasing cancellation condition*). Sie ist hier nicht notwendig, da kein Sub-Sampling stattfindet [Mal98].

Deshalb sind auch die Rekonstruktionsfilter hier nicht mehr eindeutig. Lösungen von (2.17) führen nicht zwingend auf den durch Satz 2.8 gegebenen dualen Frame.

- (b) Gibt es Beispiele für Wavelets, die Proposition 2.18 genügen? Nach (a) erzeugen insbesondere alle für die DWT konstruierten orthogonalen und biorthogonalen Filter auch dyadische Wavelets. In [Mal98] findet sich auch ein explizit für diesen Algorithmus konstruiertes Beispiel. Die etwas größere Freiheit gegenüber der DWT bei der Konstruktion von Wavelets wurde bisher in der Literatur nicht gezielt ausgenutzt.

Bezeichne  $S_0$  die Projektion von  $L^2(\mathbb{R})$  auf  $V_0 := \overline{\text{span}\{T_n \varphi, n \in \mathbb{Z}\}}$ , gegeben durch

$$S_0(f)(n) := \langle f, T_n \varphi \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Weiter sei für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und  $j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} S_j(f)(n) &:= \langle f, T_n D_{2^j} \varphi \rangle, \text{ sowie} \\ T_j(f)(n) &:= WT_\psi f(n, 2^j) = \langle f, T_n D_{2^j} \psi \rangle. \end{aligned}$$

Bezeichne weiter  $h_j$  die durch  $h_j(2^n) := h(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , und Null sonst definierte Folge aus  $l^2(\mathbb{Z})$ . Ebenso für  $g_j, h_{rekj}, g_{rekj}$ . (Von diesen mit Null aufgefüllten Filtern kommt auch der Name *a-trou-Algorithmus*.)

**Proposition 2.20** (Mallat-Algorithmus zur Berechnung der dyadischen Wavelet-Transformation) [Mal98, Proposition 5.6]

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Die Initialisierung erfolgt durch Projektion von  $f$  in  $V_0$  via  $S_0$ .

Mit wie oben gegebenen Filtern  $g, h$  gilt für alle  $j \geq 0$ :

(i) (Zerlegung)

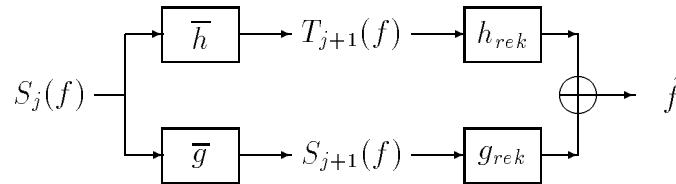
$$S_{j+1}(f) = S_j(f) * \overline{h}_j, \quad (2.21)$$

$$T_{j+1}(f) = S_j(f) * \overline{g}_j. \quad (2.22)$$

(ii) (Rekonstruktion) Erfüllen  $g_{rek}, h_{rek}$  die Voraussetzungen aus Proposition 2.18, dann folgt

$$S_j(f)(n) = \frac{1}{2} (S_{j+1}(f) * h_{rek_j}(n) + T_{j+1}(f) * g_{rek_j}(n)). \quad (2.23)$$

Zum Beweis nur eine Motivation mit Hilfe der Darstellung als Filterbank: Sei  $f \in l^2(\mathbb{Z})$ .



Formel (2.17) ist die klassische Bedingung an ein Paar Rekonstruktionsfilter, die  $S_j(f) = \frac{1}{2}\tilde{f}$  garantiert. Proposition 2.18 zeigt, dass, wenn dieses Schema iteriert wird, ein Frame für  $V_0$  entsteht, denn nach (2.9) ist die Menge  $\{T_n D_{2^j} \psi, n \in \mathbb{Z}, j > 0\}$  ein Frame für  $V_0$ . Der Raum  $V_0$  statt  $L^2(\mathbb{R})$  ist der Preis für den Start der Filterbank erst ab einer gegebenen Skala. Der duale Frame ist durch  $\{T_n D_{2^j} \psi_{rek}, n \in \mathbb{Z}, j > 0\}$  gegeben.

Proposition (2.20) zeigt nun, dass diese Filterbank Werte des Wavelet-Koeffizienten berechnet. Wesentlich für den Algorithmus ist der Ansatz, statt auf den Funktionswerten, auf Koeffizienten zu rechnen.

### 2.3.3 Die zweidimensionale dyadische Transformation

Ein Vorteil der CWT in höheren Dimensionen ist der Rotationsparameter. Obwohl Satz 2.15 theoretisch beliebige Diskretisierung der Rotation zulässt, ist es schwer, dies in einem schnellen Algorithmus zu verwirklichen. Von S. Mallat [Mal98] wurde ein Spezialfall für eine schnelle Implementation praktisch ausgenutzt: Er betrachtet einen Sonderfall mit zwei Richtungen bei geeignetem, als Tensorprodukt eindimensionaler dyadischer Wavelets gegeben, separablen Wavelet.

Dieser Algorithmus wird hier unter einem neuen, bzw. in der Literatur vernachlässigten Blickwinkel betrachtet: Wir zeigen, dass die Filterbank für den zweidimensionalen

Algorithmus auch als Diskretisierung der kontinuierlichen Transformation über der Euklidischen Gruppe mit Dilatation betrachtet werden kann. Er ist damit der über Tensorproduktansatz künstlich verallgemeinerten diskreten Wavelet-Transformation überlegen, da keine Artefakte durch Bevorzugung von Ordinatenrichtungen entstehen.

Analog zu oben erfordert der Pyramidenalgorithmus wieder Verfeinerbarkeit über Skalen: Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein dyadisches Wavelet mit der assoziierten stetigen Skalierungsfunktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$  und  $\hat{\varphi}(0) = 1$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} 2\hat{\varphi}(2\omega) &= \hat{h}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) & \text{und} \\ 2\hat{\psi}(2\omega) &= \hat{g}(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \end{aligned} \quad (2.24)$$

wobei  $\omega \in [-\pi, \pi]^2$  und  $h, g \in l^2(\mathbb{Z}^2)$  beide endlichen Träger haben (FIR-Filter). Damit haben nach [Mal98, Prop 7.3] auch  $\varphi, \psi$  kompakten Träger.

Analog sei  $\varphi_{rek} \in L^2(\mathbb{R}^2)$  Skalierungsfunktion für  $\psi_{rek} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , gegeben durch FIR-Filter  $h_{rek}, g_{rek} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$ , also

$$\begin{aligned} 2\widehat{\varphi_{rek}}(2\omega) &= \widehat{h_{rek}}(\omega)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega) & \text{und} \\ 2\widehat{\psi_{rek}}(2\omega) &= \widehat{g_{rek}}(\omega)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega). \end{aligned}$$

Welcher Bedingung müssen die Folgen  $h_{rek}, g_{rek}$  genügen, um Rekonstruktionsfilter für  $g, h$  zu sein? Das Ziel ist, für (2.9) eine Bedingung analog zu (2.17) aus Proposition 2.18 herzuleiten. Problematisch ist insbesondere die Summation über diskretisierte Rotationen. Wir wählen die spezielle Diskretisierung der Rotation  $R := \{0, \pi/2\}$  und  $\varphi$  sowie  $\varphi_{rek} \in L^2(\mathbb{R})$  separabel mit  $\varphi(\omega_x, \omega_y) = \varphi(\omega_x)\varphi(\omega_y)$  sowie  $\varphi_{rek}(\omega_x, \omega_y) = \varphi_{rek}(\omega_x)\varphi_{rek}(\omega_y)$ . Dies erlaubt, die Filter  $g, g_{rek}$  in der Summe (2.17) zusammenzufassen.

Die notwendige Bedingung (2.9) lässt sich dann umformen zu

$$\sum_{(a, \varphi) \in D \times R} \overline{R_\varphi D_a \hat{\psi}(\omega)} R_\varphi D_a \widehat{\psi_{rek}}(\omega) = 1, \quad \text{für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}^2}.$$

Zur Vereinfachung betrachten wir nur die Summanden für ein festes  $a$ , o. E.  $a = 1$ . Aus den Skalierungsgleichungen (2.24) folgt mit  $\omega = (\omega_x, \omega_y) \in \widehat{\mathbb{R}^2}$ :

$$\begin{aligned} \overline{R_\varphi \hat{\psi}(2\omega)} R_\varphi \widehat{\psi_{rek}}(2\omega) &= \\ &= \sum_{\varphi \in R} \overline{R_\varphi \hat{g}(\omega)} R_\varphi \hat{\varphi}(\omega) \overline{R_\varphi \widehat{g_{rek}}(\omega)} R_\varphi \widehat{\varphi_{rek}}(\omega) \\ &= \overline{\hat{g}(\omega)\hat{\varphi}(\omega)\widehat{g_{rek}}(\omega)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega)} + \overline{R_{\frac{\pi}{2}}\hat{g}(\omega)\hat{\varphi}(\omega_y, \omega_x)R_{\frac{\pi}{2}}\widehat{g_{rek}}(\omega)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega_y, \omega_x)}} \\ &= \left[ \overline{\hat{g}(\omega)\widehat{g_{rek}}(\omega)} + \overline{R_{\frac{\pi}{2}}\hat{g}(\omega)R_{\frac{\pi}{2}}\widehat{g_{rek}}(\omega)} \right] \overline{\hat{\varphi}(\omega_x)\hat{\varphi}(\omega_y)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega_y)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega_x)} =: (\star). \end{aligned}$$

Wähle nun  $g$  speziell durch  $\hat{g}(\omega_x, \omega_y) := \hat{g}(\omega_x) \cdot 1$  und  $\tilde{g}$  separabel als  $\widehat{g_{rek}}(\omega_x, \omega_y) = \hat{k}(\omega_x)\hat{l}(\omega_y)$  dann lässt sich weiter umformen:

$$(\star) = \left[ \overline{\hat{g}(\omega_x)\hat{k}(\omega_x)\hat{l}(\omega_y)} + \overline{\hat{g}(\omega_y)\hat{l}(\omega_x)\hat{k}(\omega_y)} \right] \overline{\hat{\varphi}(\omega_x)\hat{\varphi}(\omega_y)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega_y)\widehat{\varphi_{rek}}(\omega_x)}.$$

Also muss gelten (um das Argument aus dem Beweis von Proposition 2.18 analog durchzuführen):

$$\overline{\hat{g}(\omega_x)\hat{k}(\omega_x)\hat{l}(\omega_y)} + \overline{\hat{g}(\omega_y)\hat{l}(\omega_x)\hat{k}(\omega_y)} = \overline{\hat{h}(\omega)\widehat{h_{rek}}(\omega)} \quad (2.25)$$

Eine mögliche Lösung mit (aufgrund der Wahl von  $\varphi$ ) separablen  $\hat{h}(\omega) = \hat{h}(\omega_x)\hat{h}(\omega_y)$  und separablen  $\widehat{h_{rek}}(\omega) = \widehat{h_{rek}}(\omega_x)\widehat{h_{rek}}(\omega_y)$ , wie sie von S. Mallat eingeführt wurde, ist folgende

**Proposition 2.21** [MZ92, Appendix C] *Gelte für Funktionen  $g, h, k, l, h_{rek} \in l^2(\mathbb{Z})$*

$$\widehat{h_{rek}}(\omega_x)\overline{\widehat{h}(\omega_x)} + \overline{\hat{g}(\omega_x)\hat{k}(\omega_x)} = 1$$

und

$$\hat{l}(\omega_x) := \frac{1}{2} \left[ 1 + \widehat{h_{rek}}(\omega_x)\overline{\widehat{h}(\omega_x)} \right]$$

für fast alle  $\omega_x \in [-\pi, \pi]$ , dann gilt für die zugehörigen, über die Skalierungsgleichungen zu den Filtern  $g(x, y) := g(x)\delta_0(y)$  und  $h(x, y) := h(x)h(y)$  sowie  $g_{rek}(x, y) := k(x)l(y)$  und  $h_{rek}(x, y) := h_{rek}(x)h_{rek}(y)$  definierten Funktionen  $\psi$  und  $\psi_{rek}$

$$\sum_{(a, \varphi) \in D \times R} \overline{R_\varphi D_a \hat{\psi}(\omega)} R_\varphi D_a \widehat{\psi_{rek}}(\omega) = 1, \quad \text{für fast alle } \omega \in [-\pi, \pi]^2.$$

$\delta_0$  bezeichnet den diskreten Dirac, d. h.  $\delta_0(0) = 1$  und sonst Null,  $D = \{2^j; j \in \mathbb{Z}\}$  und  $R = \{0, \pi/2\}$ .

**BEWEIS** Aus den Voraussetzungen folgt direkt Formel (2.25). Der weitere Beweis verläuft analog zum eindimensionalen Fall in Proposition 2.18.  $\square$

### Bemerkungen 2.22

- (a) Durch die Bedingung, als Wavelet nur separable Filter zu benutzen, wird die Wahl an Wavelets gegenüber (2.7) drastisch eingeschränkt.
- (b) Die Filter  $k, l$  sind nicht durch Eigenschaften der Rekonstruktion begründet, sondern willkürlich gewählt.
- (c) Analog kann auch in höheren Dimensionen  $m$  vorgegangen werden. Nur der Filter  $L$  wird für  $m > 2$  nichtseparabel, ist aber noch als Summe separabler Filter (also als Tensorprodukt) darstellbar [KL98].

Bezeichne für alle  $n \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{N}_0$

$$S_j(f)(n) := \langle f, T_n D_{2^j} \varphi \rangle,$$

sowie

$$T_j^1(f)(n) := \langle f, T_n D_{2^j} \psi \rangle \text{ und} \\ T_j^2(f)(n) := \langle f, T_n D_{2^j} R_{\pi/2} \psi \rangle.$$

Damit lautet der Algorithmus für die zweidimensionale Transformation:

**Proposition 2.23** (Mallat-Algorithmus zur Berechnung der zweidimensionalen dyadischen Wavelet-Transformation) [MZ92, Appendix D]

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Die Initialisierung erfolgt durch Projektion von  $f$  in  $V_0$  via  $S_0$ .

(i) (Zerlegung) Mit wie oben gegebenen Filtern  $g, h$  gilt für alle  $j \geq 0$ :

$$S_{j+1}(f) = S_j(f) * \overline{h_j h_j}$$

$$T_{j+1}^1(f) = S_j(f) * \overline{g_j} \delta_0$$

$$T_{j+1}^2(f) = S_j(f) * \delta_0 \overline{g_j}.$$

(ii) (Rekonstruktion) Erfüllen  $h_{rek}, k, l$  die Voraussetzungen aus Proposition 2.21, so gilt:

$$S_j f = T_{j+1}^1 f * k_j l_j + T_{j+1}^2 f * l_j k_j + S_{j+1} f * h_{rek_j} h_{rek_j}.$$

**Bemerkung 2.24** Vergleiche Satz 2.6 zur Tensorprodukt-Verallgemeinerung der Multiskalenanalyse in höhere Dimensionen. Auf den ersten Blick sieht dieser Algorithmus auch nach einem Tensorprodukt-Ansatz aus. Dann würde aber ein dritter Wavelet-Filter  $T_{j+1}^3$ , mit dem, im Tensorprodukt auftretenden, dritten Kreuzterm  $g_j g_j$ , fehlen.

Dieser zweidimensionale Algorithmus wurde nicht durch ein Tensorprodukt erreicht. Statt dessen wurde die Dilatationsgruppe der zweidimensionalen CWT diskretisiert, wobei die Operation der Rotationen der  $SO(2)$  in genau zwei Richtungen diskretisiert wurde. Dabei wird ein separables Wavelet verwendet, welches zu dem ähnlich aussehenden Algorithmus führt.

Sind  $\varphi$  und  $\psi$  achsensymmetrisch, dann wurden implizit alle vier Richtungen  $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  berechnet, also bezüglich einer zyklischen Untergruppe der Rotationen diskretisiert. Das ist die zur Bildanalyse geeignete Interpretation des Mallat-Algorithmus.  $\square$

## Diskussion

Im Gegensatz zur MSA erlaubt der Ansatz über Frames eine translationskovariante Transformation, wie für die Anwendung zur Bildanalyse erforderlich. Weiter kann auch die mehrdimensionale CWT, insbesondere die Operation der Rotation, kanonisch diskretisiert werden, was für die schnelle Wavelet-Transformation nicht der Fall ist. Durch den Ansatz mit separablen Filtern ist der Mallat-Algorithmus einer Implementation mit der zweidimensionalen FFT überlegen.

Problemstellen des Mallat-Algorithmus sind:

- (i) **Rekonstruktion.** Es ist ein dualer Frame zu bestimmen. Das ist, wie in Bemerkung 2.9 diskutiert, aufwendig. Deshalb ist das Ziel, feste Frames zu konstruieren.
- (ii) **Dyadische Diskretisierung der Skala.** Die Diskretisierung der Skala ist aufgrund des Pyramidenschemas eingeschränkt.

- (iii) **Orientierung.** Der Mallat-Algorithmus berechnet zwei Richtungen. Damit kann in einem Punkt nur der Gradient angegeben werden. Daraus ergibt sich ein Nachteil für die punktweise Analyse von Signalen. So liefert der Gradient im Kreuzungspunkt zweier Kanten keine verwertbare Information.

Für die Detektion von Mikroverkalkungen in Mammographien sind z. B. Verkalkungen und Kreuzungen von Gewebestrukturen zu unterscheiden. Dafür wird mehr Richtungsinformation benötigt. In Abschnitt 7.2.3 wird eine Skala-Winkel-Darstellung der kontinuierlichen Transformation vorgestellt, die zeigt, dass sich solche Strukturen in Mammographien mit Hilfe des Rotationsparameters der CWT unterscheiden lassen.

- (iv) **Wavelets.** Die Freiheit bei der Wahl des Wavelets ist durch die, für den Algorithmus notwendige, Skalierungsgleichung deutlich eingeschränkt.

Kern dieser Arbeit ist die integrierte Wavelet-Transformation, welche im folgenden Kapitel eingeführt wird. Diese bietet Lösungen für die angegebenen Problemstellen.

So führen integrierte Wavelets kanonisch auf feste Frames, womit Punkt (i) behoben wird. Die integrierte Wavelet-Transformation erlaubt insbesondere auch die flexible Wahl der Skala und Orientierung und behebt somit die Punkte (ii) und (iii). Bei der integrierten Wavelet-Transformation gibt es keine wesentliche Einschränkung an das Wavelet. In Abschnitt 3.5 wird ein Pyramidenalgorithmus mit approximativen Filtern vorgestellt, der ohne Skalierungsgleichung auskommt, also eine deutlich größere Klasse von Wavelets zulässt. In Abschnitt 6.6 wird eine Implementation mit Hilfe der FFT angegeben. Dies deutet bereits darauf hin, dass der Gewinn an Flexibilität bei integrierten Wavelets durch einen im Vergleich zu obigem Pyramidenalgorithmus langsameren Algorithmus ausgeglichen wird. Für die Anwendung in der digitalen Mammographie ist dies jedoch kein Problem, da hier keine Echtzeitanforderungen an den Algorithmus vorliegen. In Abschnitt 6.9 werden die dyadische und die integrierte Wavelet-Transformation bei der Hervorhebung von Mikrokalk anhand von Beispielen verglichen.

# Kapitel 3

## Integrierte Wavelet-Transformation

Wir suchen eine für die Bildanalyse geeignete Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. Nachdem im zweiten Kapitel zwei bekannte Diskretisierungen vorgestellt und deren Probleme aufgezeigt wurden, wird in diesem Kapitel eine neue Methode zur Konstruktion von Wavelet-Frames entwickelt. Diese zeichnet sich durch große Flexibilität aus und behält die für die Bildanalyse zentralen Eigenschaften der kontinuierlichen Transformation, wie Rekonstruktion, Translationskovarianz und freie Wahl des Wavelets. Die Konstruktion basiert auf der Idee, kontinuierliche Wavelet-Koeffizienten nicht abzutasten, sondern durch Mittelung über eine Umgebung zu diskretisieren. Daher kommt die Namensgebung *integrierte Wavelet-Transformation*. Bei einer Diskretisierung durch Abtasten müssen, wie im zweiten Kapitel ausgeführt, Frame Schranken bestimmt und ein dualer Frame berechnet werden. Dagegen führt der hier vorgestellte Ansatz über Mittelung unabhängig von der Wahl der Diskretisierung auf eine feste Familie von Faltungsoperatoren. Ein Spezialfall ist die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation. Diese basiert auf der in Kapitel 1 vorgestellten Morlet-Rekonstruktion. Deren Diskretisierung führt auf eine effiziente Rekonstruktion.

Das Kapitel beginnt mit der Definition integrierter Wavelets. In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, dass dieser Ansatz zu einem kontinuierlichen Analogon der Multiskalenanalyse führt. Dabei wird der Begriff der Skalierungsfunktion von der Multiskalenanalyse auf kontinuierliche Wavelets übertragen. In Abschnitt 3.5 wird ein Pyramidenalgorithmus vorgestellt, der ebenfalls aus der Multiskalenanalyse motiviert ist. Diese Ideen stammen in einer Formulierung für eindimensionale affine Wavelets aus Arbeiten von M. Duval-Destin, M. A. Muschietti und B. Torrèsani [DDMT93, MT95] und werden hier auf die von Murenzi [Mur90] untersuchte Euklidische Gruppe mit Dilatation verallgemeinert. Anregungen dazu stammen von J.-P. Antoine [ACMP93]. Neu sind Betrachtungen zur Lokalisierung des integrierten Wavelets in Abschnitt 3.2.1 sowie die Konstruktion fester Familien von Faltungsoperatoren in Abschnitt 3.6. Diese spielen im zweiten Teil der Arbeit zur Anwendung in der digitalen Mammographie eine zentrale Rolle.

Das Kapitel schließt mit Untersuchungen für Morlet-integrierte Wavelets. Insbesondere wird in Abschnitt 3.7 der, von der kontinuierlichen Transformation bekannte, Zusammen-

hang zur Lipschitz-Regularität hergestellt.

**Hinweis:** In diesem Kapitel wird oft die  $L^1$ -Normierung der Wavelet-Transformation, wie in Abschnitt 1.3 eingeführt, verwendet. Sie wird auch in den dieser Arbeit zugrunde liegenden Quellen verwendet. Diese Normierung ist begründet durch die Gestalt des integrierten Wavelets. Ihm liegt im wesentlichen die Integration über das Produkt  $|\hat{\psi}|^2$  zugrunde, welches eine  $L^1$ -Funktion ist.

### 3.1 Skala und Detail

In diesem Abschnitt werden die aus der Multiskalenanalyse bekannten Begriffe der Skala sowie der Skalierungsfunktion auf die kontinuierliche Wavelet-Transformation der Euklidischen Gruppe mit Dilatation übertragen. Für die Existenz der Skala muss das Wavelet die folgende zusätzliche Bedingung erfüllen:

**Definition 3.1** *Das Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  heißt infinitesimales Wavelet, falls für die Funktion  $r$ , definiert durch*

$$r(x) := \frac{1}{\|x\|^m} \int_{\|y\| < \|x\|} \tilde{\psi} * \psi(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad (3.1)$$

*gilt  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$ .*

**Bemerkung 3.2** [Hei98, Lemma 2.10] In diesem Fall existiert  $\hat{r}$  mit

$$\hat{r}(\omega) = \int_{\|y\| > \|\omega\|} \tilde{\psi}(y) \hat{\psi}(y) \frac{dy}{\|y\|^m}, \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}. \quad (3.2)$$

Insbesondere gilt  $\hat{r}(0) = c_\psi$ , wobei  $c_\psi$  die Zulässigkeitskonstante von  $\psi$  ist. Weiter gilt  $\hat{r}(\omega) \geq 0$  und  $\hat{r}$  fällt monoton für  $\|\omega\| \rightarrow \infty$ .  $\square$

Wir zitieren zwei Kriterien für infinitesimale Wavelets:

**Lemma 3.3** [Hei98, Proposition 2.15] *Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Falls für  $F := \tilde{\psi} * \psi$  gilt*

$$\ln(\|x\|) F(x) \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

*dann folgt für  $r$  aus Formel (3.1), dass  $r \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$ .*

*Insbesondere ist  $\psi$  ein infinitesimales Wavelet.*

**Lemma 3.4** [DDMT93] *Der atomare Hardy-Raum  $H_a^1(\mathbb{R})$  ist der Raum der Funktion in  $L^1(\mathbb{R})$ , deren Hilbert-Transformierte ebenfalls in  $L^1(\mathbb{R})$  liegt.*

*Sei  $\psi$  aus  $H_a^1(\mathbb{R})$  und reell. Dann ist  $\psi$  ein infinitesimales Wavelet.*



**Definition 3.5** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet und  $(a, \rho) \in \mathbb{R}_+^* \times SO(m)$ . Die Funktion  $d(f)_{\rho, a} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,

$$d(f)_{\rho, a} := \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, U_g \psi \rangle U_g \psi \, db, \quad g = (b, a, \rho),$$

heißt **Detail** von  $f$  in  $(a, \rho)$ .

Sei  $\psi$  infinitesimales Wavelet und  $r$  wie in (3.1), also  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$ . Die **Skala**  $s(f)_a \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $a > 0$ , ist definiert durch

$$s(f)_a := f * D_a r.$$

Sei weiter  $\hat{r} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}^m})$ . Dann gilt die Faktorisierung  $r = \tilde{\varphi} * \varphi$  mit einer **Skalierungsfunktion**  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , welche über ihre Fourier-Transformierte definiert ist durch

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 := \hat{r}(\omega) = \int_1^\infty \int_{SO(m)} \left| \sqrt{a} \hat{\psi}(a\rho(\omega)) \right|^2 d\rho \frac{da}{a}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}. \quad (3.3)$$

In diesem Fall lässt sich die Skala schreiben als

$$s(f)_a = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, D_a \varphi \rangle D_a \varphi \, db. \quad (3.4)$$

### Bemerkungen 3.6

- (a) Es gilt  $d(f)_{\rho, a} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , da  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ . Weiter gilt  $s(f)_a \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , da wir  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$  gefordert haben.  
Nach Bemerkung 3.2 gilt  $\hat{r}(\omega) \geq 0$ , da der Integrand in (3.2) nicht negativ ist. Wegen  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$  gilt  $\hat{r}(\omega) < \infty$ , damit ist  $\hat{\varphi}$  in (3.3) wohldefiniert.
- (b) Die Bedingung  $\hat{r} \in L^1(\widehat{\mathbb{R}^m})$  ist notwendig für  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und damit die Existenz von Formel (3.4). Dies folgt aus der Charakterisierung  $A(G) = L^2(G) * \widehat{L^2(G)}$ , wobei  $A(G)$  den Raum aller Funktionen über  $G$  bezeichnet, deren Fourier-Transformierte in  $L^1(\widehat{G})$  liegen.
- (c) Die Funktion  $\varphi$  ist nicht eindeutig bestimmt. Es gilt  $\hat{\varphi}(\omega) := |\hat{r}(\omega)|^{1/2} \exp(i\tau(\omega))$ , wobei  $\tau$  eine beliebige messbare Funktion ist. Man erhält ein eindeutiges  $\varphi$  falls man z. B. fordert, dass es reell und nicht negativ ist, d. h.  $\tau = 0$ . Die genaue Wahl von  $\varphi$  ist nicht wesentlich, da die Skalierungsfunktion in Anwendungen nicht betrachtet wird. Das gleiche Problem tritt auch bei dem im folgenden definierten integrierten Wavelet auf und wird in Abschnitt 3.2.1 behandelt.
- (d) Analog zur Multiskalenanalyse gilt  $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ , d. h. der Mittelwert von  $\varphi$  verschwindet nicht. Dies ist genau die charakterisierende Eigenschaft eines Tiefpassfilters, vgl. Definition 5.1. Dagegen verschwindet der Mittelwert eines infinitesimalen Wavelets, was es als Hochpassfilter charakterisiert.

**Lemma 3.7** Für ein isotropes Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und einen Vektor  $\omega \neq 0$  gilt für die partielle Richtungsableitung der Zusammenhang

$$|\hat{\psi}(\omega)|^2 = -\omega \frac{d}{d\omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2.$$

BEWEIS Diese Aussage findet sich für die affine Gruppe in [DDMT93]. Dies folgt mit der Bezeichnung  $S_\psi$  für die Stammfunktion von  $a \mapsto \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{a}$  und  $e$  für einen Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^m$  aus

$$\frac{d}{d\omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \frac{d}{d\omega} \int_{\|\omega\|}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(ae)|^2}{a} da = \frac{d}{d\omega} [0 - S_\psi(\omega)] = -\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}.$$

□

**Proposition 3.8** Der Zusammenhang zwischen Skala und Detail lautet

$$s(f)_a = \int_a^\infty \int_{SO(m)} d(f)_{(u,\rho)} d\rho \frac{du}{u}. \quad (3.5)$$

BEWEIS Ein Beweis für den eindimensionalen Fall findet sich in [MT95]. Im Fourier-Raum gilt für  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m$

$$\begin{aligned} \widehat{s(f)}_a(\omega) &= \frac{1}{c_\psi} |\sqrt{a}\hat{\varphi}(a\omega)|^2 \hat{f}(\omega) \\ &= \frac{1}{c_\psi} \left( \int_a^\infty \int_{SO(m)} |\hat{\psi}(u\rho(\omega))|^2 d\rho du \right) \hat{f}(\omega) \\ &= \int_a^\infty \int_{SO(m)} \widehat{d(f)}_{u,\rho}(\omega) d\rho \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

□

Eine Skala  $a$  ist also Summe aller Details  $a'$  mit  $a' > a$  und somit eine partielle Rekonstruktion.

Mit der Notation in Skalen erhalten wir aus der Normkonvergenz der Rekonstruktionsformel in Lemma 1.35 das

**Korollar 3.9** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein infinitesimales Wavelet. Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  gilt

$$f = \lim_{a \rightarrow 0} s(f)_a$$

in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

## 3.2 Integrierte Wavelet-Transformation

Nun wird die Dilatationsgruppe  $H = \mathbb{R}_+^* \times SO(m)$  diskretisiert. Die Operation der Translation bleibt vorerst kontinuierlich. Dies führt auf eine semidiskrete Transformation.

Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  eine streng monoton fallende Folge in  $\mathbb{R}_+^*$  mit  $\lim_{j \rightarrow -\infty} a_j = \infty$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ . Weiter sei  $(K_l)_{l \in L}$  eine Partition von  $SO(m)$ , wobei  $L$  eine diskrete Indexmenge ist.

**Definition 3.10** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Eine Funktion  $\Psi^{j,l} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $(j, l) \in \mathbb{Z} \times L$ , für deren Fourier-Transformierte gilt

$$|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |\widehat{D_a R_\rho \psi}(\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a}, \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}, \quad (3.6)$$

heißt **integriertes Wavelet**.

Sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Die Funktion  $D_{j,l}(f) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,

$$D_{j,l}(f)(x) := \frac{1}{c_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} d_{(\rho,a)}(x) \frac{d\rho da}{a}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

heißt **diskretes Detail von  $f$  in  $(j, l) \in \mathbb{Z} \times L$** .

Bezeichne  $\Psi^j := \sum_{l \in L} \Psi^{j,l}$ .

Im Fourier-Raum lautet der Zusammenhang zwischen integriertem Wavelet und diskretem Detail

$$\widehat{D_{j,l}}(f) = |\widehat{\Psi^{j,l}}|^2 \cdot \hat{f}.$$

Aufgrund der Zulässigkeitsbedingung (1.2) erhält man unmittelbar eine Partition der Eins im Fourier-Raum.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} |\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 = 1, \quad \text{für } \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m} \setminus \{0\}. \quad (3.7)$$

### Bemerkungen 3.11

- (a) Die Definition des integrierten Wavelets in (3.6) erfolgt in der  $L^1$ -Normierung. (Es sei erinnert an die  $L^1$ -normierte Definition der Dilatation  $D$  in Abschnitt 1.3.) Damit entspricht die Definition genau der Integration über einen Teil der Zulässigkeitsbedingung, woraus auch (3.7) folgt.

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |\widehat{D_a R_\rho \psi}(\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a} &= \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |R_{-\rho} \hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a} \\ &= \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |a^{m/2} R_{-\rho} \hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a^{m+1}} \end{aligned}$$

Das Maß  $\frac{d\rho da}{a^{m+1}}$  ist genau das in der Wavelet-Synthese (1.4) auftretende. Somit ist die Definition kanonisch mit der  $L^2$ -normierten Transformation verbunden.

- (b) Die Phase der Fourier-Transformierten des integrierten Wavelets ist durch (3.6) nicht eindeutig festgelegt. Diese wird in Abschnitt 3.2.1 diskutiert.
- (c) Die Partition der Dilatation  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  kann nicht endlich gewählt werden. Für ein infinitesimales Wavelet existiert zu dem Intervall  $[0, a_j]$  die Skalierungsfunktion, die als Randfall eines integrierten Wavelets betrachtet werden kann. Jedoch ist eine analoge Konstruktion für  $j \rightarrow -\infty$  nicht möglich, da bei Integration über ein Intervall  $[a_j, \infty]$  keine  $L^2$ -Funktion mehr entstehen kann.

Die zu einer Folge  $(a_j)_j$  und Partition  $(K_l)_l$  definierte Familie  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  von Funktionen wird im folgenden ebenfalls **integriertes Wavelet** genannt. Ob die ganze Familie  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  oder nur ein Element  $\Psi^{j,l}$  gemeint ist, ergibt sich eindeutig durch die Notation.

**Definition 3.12** Sei  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Die Abbildung

$$WT^I : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z} \times L))$$

$$f \mapsto \langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle, \quad b \in \mathbb{R}^m, (j, l) \in \mathbb{Z} \times L,$$

heißt **integrierte Wavelet-Transformation**.

**Bemerkung 3.13** A priori ist nicht klar, warum das Bild der integrierten Wavelet-Transformation in  $l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z} \times L))$  liegt. Für die dyadische Wavelet-Transformation gilt dies, wie in Kapitel 2 gezeigt, erst mit einer zusätzlichen Forderung an das Wavelet, die der Zulässigkeitsbedingung (2.6) für eine semidiskrete Wavelet-Transformation entspricht. Wir greifen hier dem Ergebnis von Satz 3.45 vor. Dieser besagt, dass die integrierte Wavelet-Transformation für alle Wavelets sogar eine Isometrie in den Raum  $l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z} \times L))$  ist.  $\square$

Zusammengefasst gilt für ein infinitesimales Wavelet die Rekonstruktionsformel

$$f = \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, T_b D_{j_0} \varphi \rangle T_b D_{j_0} \varphi db + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{l \in L} \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle T_b \Psi^{j,l} db. \quad (3.8)$$

Dabei gilt die Identität nach Satz 1.29 im schwachen Sinn oder, fasst man die Summation als Limes auf, nach Lemma 1.35 in der  $L^2$ -Norm.

Es stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation. Dieser wird für eine Variante, der Morlet-integrierten Transformation, in Abschnitt 3.7 anhand der Lipschitz-Regularität hergestellt.

Für integrierte Wavelets erhalten wir einen expliziten Zusammenhang zur klassischen Diskretisierung durch Abtasten nach der Diskretisierung der Translation. So wird in Abschnitt 3.6 gezeigt, dass integrierte Wavelets für geeignete Diskretisierung der Dilatationsgruppe auf klassische Wavelet-Frames führen.

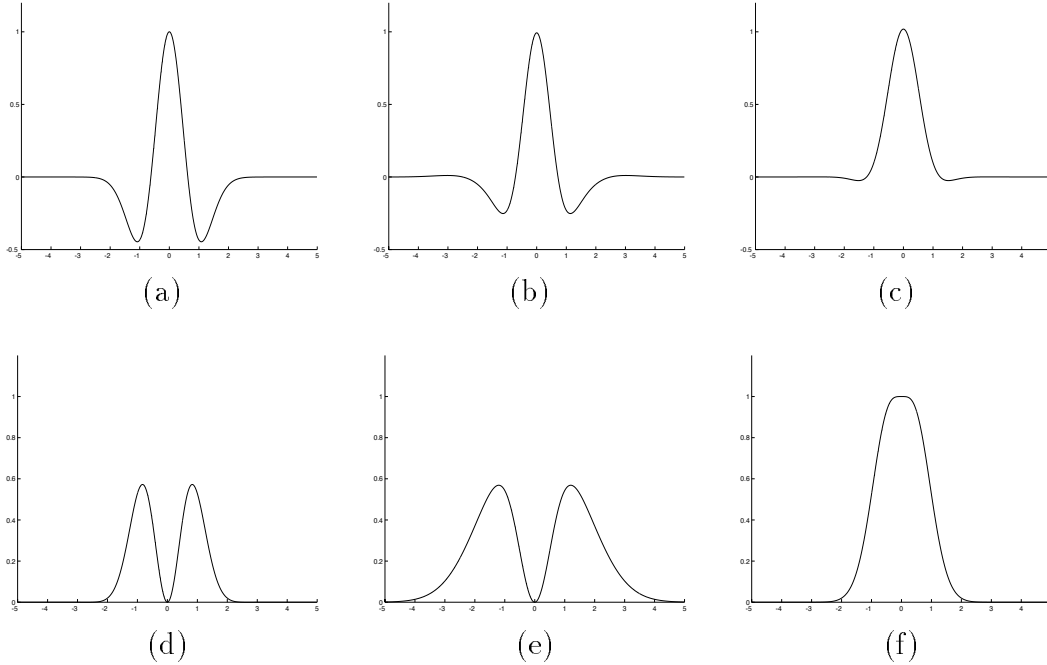
**Beispiel 3.14** Wie geben Beispiele für integrierte Wavelets über  $G = \mathbb{R}^m \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(m))$  an.

- (i) **Gauß-Wavelet.** Das Gauß-Wavelet auf  $\mathbb{R}^m$  ist gegeben durch  $\psi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - \|x\|^2)e^{-\|x\|^2}$ , im Fourier-Raum  $\hat{\psi}(\omega) = \|\omega\|^2 e^{-\|\omega\|^2/2}$ . Das zugehörige integrierte Wavelet lautet nach Formel (3.6)

$$|\widehat{\Psi^j}(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \left( ((a_j \|\omega\|)^2 + 1)e^{-(a_j \|\omega\|)^2} - ((a_{j+1} \|\omega\|)^2 + 1)e^{-(a_{j+1} \|\omega\|)^2} \right).$$

Die Skalierungsfunktion lautet  $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \frac{1}{2}(1 + \|\omega\|^2)e^{-\|\omega\|^2}$ .

In Abbildung 3.1 sind die Funktionen dargestellt. In Beispiel 3.23 wird eine Variante mit Richtungsfiltern vorgestellt. Das Gauß-Wavelet wird später für die Anwendung integrierte Wavelets auf Mammographien verwendet.



**Abbildung 3.1: Integriertes Gauß-Wavelet.** (a) Das Gauß-Wavelet  $\psi$ , (b) das integrierte Gauß-Wavelet  $\Psi^0$ , mit  $a_0 = 1$  und  $a_1=2$  und (c) die Skalierungsfunktion  $\varphi$ . (d-f) zeigen die jeweiligen Fourier-Transformierten.

- (ii) **Poisson Wavelet.** Das Poisson Wavelet auf  $\mathbb{R}^m$  ist im Fourier-Raum definiert als  $\hat{\psi}(\omega) := \|\omega\| e^{-\|\omega\|}$ ,  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}$ . Das Wavelet ist isotrop. Das integrierte Wavelet ist nach Formel (3.6) gegeben durch

$$|\widehat{\Psi^j}(\omega)|^2 = \left( \frac{1}{2} a_{j+1} \|\omega\| + \frac{1}{4} \right) e^{-2a_{j+1} \|\omega\|} - \left( \frac{1}{2} a_j \|\omega\| + \frac{1}{4} \right) e^{-2a_j \|\omega\|}.$$

Die Skalierungsfunktion lautet  $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \left(\frac{1}{2}\|\omega\| + \frac{1}{4}\right) e^{-2\|\omega\|}$ .

□

### 3.2.1 Zur Lokalisierung des integrierten Wavelets

Das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  ist bisher nur im Betrag der Fourier-Transformierten eindeutig festgelegt, die Phase ist noch unbestimmt. Im Gegensatz zur Skalierungsfunktion ist die Wahl der Phase bei  $\Psi^{j,l}$  aber für die Interpretierbarkeit der integrierten Transformation von großer Bedeutung. Insbesondere bestimmt die Phase, wo  $\Psi^{j,l}$  lokalisiert ist. Diese Lokalisierung sollte von dem Wavelet  $\psi$  abhängen und nicht willkürlich sein, da sonst die Transformierte nicht mehr interpretierbar ist.

Analog zu Bemerkung 3.6(c) erhalten wir ein eindeutiges integriertes Wavelet, wenn wir fordern, dass  $\widehat{\Psi^{j,l}}$  reell und nichtnegativ ist. Dies ist der Ansatz in [DDMT93]. Jedoch macht dies nur für ein Wavelet  $\psi$  Sinn, welches selbst eine reelle, nichtnegative Fourier-Transformierte besitzt.

Diese Einschränkung wird hier behoben. Für den allgemeinen Fall legen ich das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  durch folgenden Phasenfaktor eindeutig fest:

**Definition 3.15** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Die Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  in  $\mathbb{R}_+^*$  sowie die Partition  $(K_l)_{l \in L}$  von  $SO(m)$  seien wie oben gegeben. Sei  $\rho_l \in K_l$  fest gewählt.

Die Phase des integrierten Wavelets  $\Psi^{j,l}$  wird durch

$$\arg\left(\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)\right) := \arg\left(\widehat{\psi}(a_j \rho_l \omega)\right), \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}. \quad (3.9)$$

festgelegt.

Diese Definition ist nur für im Fourier-Raum stetige Wavelets möglich, weshalb  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  gefordert wird. Die Wahl von  $a_j$  in (3.9) ist willkürlich und nur zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen gewählt. Genauso könnte in (3.9) jeder andere Wert aus dem Intervall  $[a_j, a_{j+1}]$  gewählt werden. Die folgenden Aussagen wären dann entsprechend anzupassen.

Aussagen über die Rekonstruktion gelten unabhängig von der Wahl der Phase des integrierten Wavelets, da dort nur das Produkt  $|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2$  eingeht. Wenn wir im folgenden den Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation betrachten, ist – wenn wir von dem integrierten Wavelet sprechen – die durch obige Definitionen in Betrag und Phase eindeutig festgelegte Familie  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  gemeint.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass das integrierte Wavelet zu einem bandbeschränkten Wavelet selbst wieder bandbeschränkt ist. Obige Definition stellt sicher, dass das integrierte Wavelet sich nicht zu sehr vom Wavelet unterscheidet, wie folgende Aussagen zeigen.

**Satz 3.16** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet und  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  die zugehörige Familie integrierter Wavelets. Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{Z}$  und  $l \in L$ :

$$\|\Psi^{j,l} - D_{a_j} R_{-\rho_l} \psi\|_2^2 \leq \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j} \mu(K_l) \int_{\mathbb{R}^m} 2 \sup_{\substack{a \in [a_{j+1}, a_j] \\ \rho \in K_l}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \quad (3.10)$$

Das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  hängt von  $a_{j+1}$  ab, ist in obiger Formel also variabel.

BEWEIS Nach Definition 3.15 der Phase des integrierten Wavelets gilt für alle  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m$

$$\text{sign}(\hat{\psi}(a_j \rho_l \omega)) = \text{sign}(\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)).$$

Mit der punktweise angewendeten Abschätzung  $|a - b|^2 \leq |a^2 - b^2|$ ,  $ab > 0$ , folgt

$$\begin{aligned} \|\Psi^j - D_{a_j} R_{-\rho_l} \psi\|_2^2 &= \|\widehat{\Psi}^j - D_{1/a_j} R_{\rho_l} \hat{\psi}\|_2^2 \\ &\leq \left\| |\widehat{\Psi}^j|^2 - |D_{1/a_j} R_{\rho_l} \hat{\psi}|^2 \right\|_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} |\hat{\psi}(a\rho\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a} - |\hat{\psi}(a_j \rho_l \omega)|^2 \right| d\omega \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} \left| |\hat{\psi}(a\rho\omega)|^2 - |\hat{\psi}(a_j \rho_l \omega)|^2 \right| \frac{d\rho da}{a} d\omega \\ &\leq \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j} \mu(K_l) \int_{\mathbb{R}^m} 2 \sup_{\substack{a \in [a_{j+1}, a_j] \\ \rho \in K_l}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.17** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein bandbeschränktes Wavelet. Dann gilt

$$\lim_{a_{j+1} \rightarrow a_j} \|\Psi^{j,l} - D_{a_j} R_{-\rho_l} \psi\|_2^2 = 0. \quad (3.11)$$

BEWEIS Da  $\psi$  bandbeschränkt gewählt ist, hat  $\hat{\psi}$  beschränkten Träger, z. B. in  $[-C, C]^m$  für ein  $C > 0$ . Weiter ist  $\hat{\psi}$  aufgrund  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  beschränkt. Es folgt

$$\sup_{\substack{a \in [a_{j+1}, a_j] \\ \rho \in K_l}} |\hat{\psi}(a\rho\omega)| \leq \begin{cases} \|\hat{\psi}\|_\infty & \|\omega\|_\infty < \frac{c}{a_{j+1}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist das Integral in (3.10) durch eine Konstante  $C_{\psi, a_0}$  beschränkt und es folgt

$$\|\Psi^j - D_{a_j} R_{-\rho_l} \psi\|_2^2 \leq \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j} C_{\psi, a_0}.$$

Formel (3.11) gilt, da für alle  $a > a_0$  folgt  $C_{\psi, a} \leq C_{\psi, a_0}$ .

□

**Bemerkung 3.18** Die Definition der integrierten Wavelet-Transformation führt auf eine klassische Rekonstruktion. auch wenn für die Rekonstruktion ein anderes Wavelet  $\chi \neq \psi$  gewählt wird, geht bei der Rekonstruktion (3.7) nur das Produkt  $|\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)|^2$  ein. Die Auftrennung in zwei Faktoren – einer für Analyse, einer für Synthese – über die Wurzel ist dabei willkürlich. Ebenso könnte man in Definition 3.6 zwei Funktionen  $\Psi, \Xi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  über ihr Produkt  $\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)\widehat{\Xi}^{j,l}(\omega)$  definieren. Dies würde auf eine riesige Wahlfreiheit, allerdings ohne Zusammenhang zur kontinuierlichen Wavelet-Zerlegung führen. Weiter bestände kein Zusammenhang zwischen den Funktionen  $\Psi, \Xi$  und den Wavelets  $\psi, \chi$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass die integrierten Wavelet-Koeffizienten, bei geeigneter Gewichtung, im Limes den kontinuierlichen entsprechen. Je feiner also die Diskretisierung der Skala, um so besser die Approximation der kontinuierlichen Transformation. Auch wird die Wahl der Phase in Definition (3.15) des integrierten Wavelets klar. Der Satz ist nur für den eindimensionalen affinen Fall formuliert, die mehrdimensionale Variante sieht analog aus.

**Satz 3.19** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  ein Wavelet Dann gilt für alle  $j \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{a_{j+1} \rightarrow a_j} \frac{\sqrt{a_{j+1}}}{\sqrt{a_j - a_{j+1}}} \langle f, T_b \Psi^j \rangle = WT_{\psi} f(b, a_j).$$

Das integrierte Wavelet  $\Psi^j$  hängt von  $a_{j+1}$  ab, ist in obiger Formel also variabel.

**BEWEIS** Nach Voraussetzung ist  $\hat{\psi}$  stetig. Es gilt nach Definition von  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{a_{j+1} \rightarrow a_j} \frac{\sqrt{a_{j+1}}}{\sqrt{a_j - a_{j+1}}} \langle f, T_b \Psi^j \rangle = \\ & = \lim_{a_{j+1} \rightarrow a_j} \frac{\sqrt{a_{j+1}}}{\sqrt{a_j - a_{j+1}}} \left\langle \hat{f}, E_b \arg(\hat{\psi}(a_j \omega)) \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a} \right|^{1/2} \right\rangle \\ & = \left\langle \hat{f}, E_b \hat{\psi}(a_j \omega) \right\rangle = WT_{\psi} f(b, a_j). \end{aligned}$$

$\square$

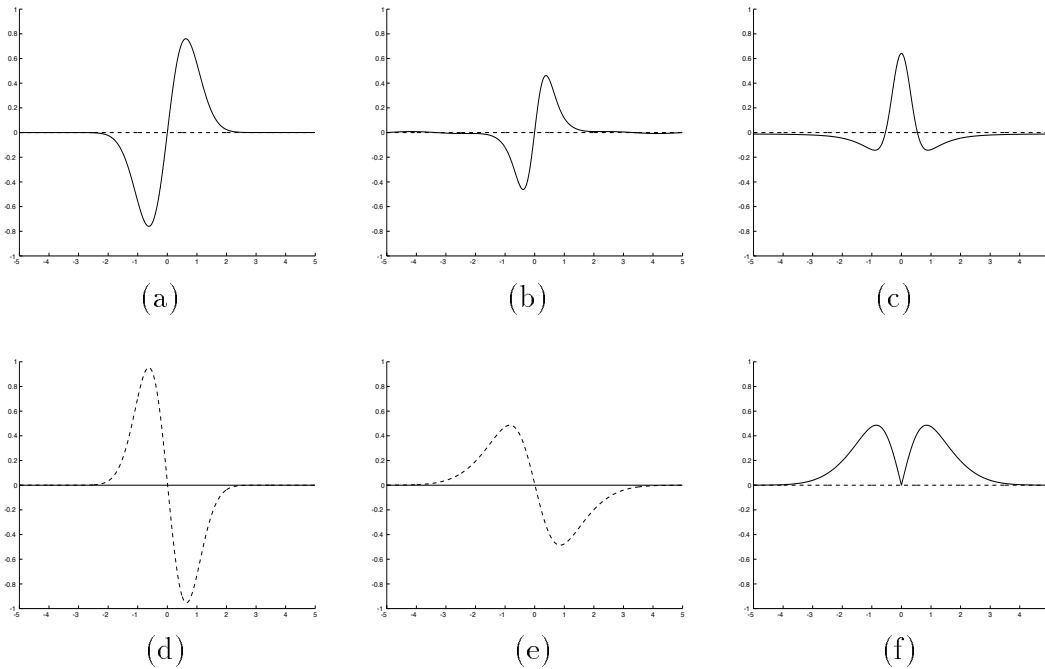
In Abschnitt 3.4 wird eine Variante, die Morlet-integrierte Transformation definiert. Für diese werden wir in Lemma 3.35 einen stärkeren Zusammenhang zur kontinuierlichen Transformation zeigen.

**Beispiel 3.20** Abschließend zeigen wir ein konkretes Beispiel, welches die Notwendigkeit des Phasenfaktors aus Definition 3.15 illustriert. Als Wavelet nehmen wir die erste Ableitung der Gauß-Funktion,  $\psi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , im Fourier-Raum  $\hat{\psi}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2/2}$ . Das zugehörige integrierte Wavelet lautet nach Formel (3.6)

$$\widehat{\Psi}^j(\omega) = \frac{i}{2} \text{sign}(\text{Im}(\hat{\psi}(a_j \omega))) \sqrt{e^{-(a_j \omega)^2} - e^{-(a_{j+1} \omega)^2}}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}.$$



In Abbildung 3.2 sind die Funktionen dargestellt. Offensichtlich ist der Phasenfaktor für die Gestalt des integrierten Wavelets von entscheidender Bedeutung. So hat das ohne Phasenfaktor berechnete integrierte Wavelet aus Abbildung 3.2 (c) keine Ähnlichkeit zu dem ursprünglichen Wavelet  $\psi$ .  $\square$



**Abbildung 3.2: Integriertes Kantenwavelet.** (a) Das Wavelet  $\psi$  aus Beispiel 3.20. (b) Das zugehörige integrierte Wavelet  $\Psi^0$ , mit  $a_0 = 1$  und  $a_1=2$ . (c) Das integrierte Wavelet, würde man den Phasenfaktor aus Definition 3.15 ignorieren und eine reelle, nichtnegative Fourier-Transformierte verwenden. (d-f) zeigen die jeweiligen Fourier-Transformierten. Durchgezogene Linien zeigen den Realteil, gestrichelte den Imaginärteil der jeweiligen Funktion.

### 3.2.2 Konstruktion orientierter Filter

Obwohl theoretisch maximale Freiheit bei der Wahl des Wavelets gegeben ist, sind explizite Beispiele für orientierte (gerichtete) Wavelets schwer zu konstruieren. Dies liegt an der doppelten Integration über Dilatation und Rotation in Formel (3.6). Diese ist für die typischerweise in kartesischen Koordinaten gegebenen gerichteten Wavelets, wie z. B. Cauchy-Wavelets [Ant98, AMV99], selten explizit lösbar. Das Problem lässt sich mit in Polarkoordinaten separablen Wavelets umgehen. Das Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  sei gegeben durch

$$\hat{\psi}(\omega) = \mu(|\omega|)\eta(\arg(\omega)), \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m,$$

mit Funktionen  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\eta : S_{m-1} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Für so ein Wavelet erhält man das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $(j, l) \in \mathbb{Z} \times L$  durch

$$|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 = \frac{1}{c_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} |\mu(|\omega a|)|^2 \frac{da}{a} \int_{K_l} |R_\rho \eta(\arg(\omega))|^2 d\rho \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m, \quad (3.12)$$

Diese Klasse von Wavelets führt nicht nur auf eine vereinfachte Rechnung. Die Separabilität in Polarkoordinaten ist auch gut an die geometrische Struktur des Bildes angepasst. Dies hebt in Polarkoordinaten separable Wavelets deutlich von klassischen, in kartesischen Koordinaten separablen Wavelets ab. Für jene wurde die mehrdimensionale Transformation nicht an die geometrische Struktur des Bildes, sondern an die Struktur der Repräsentation eines Bildes in einem Pixel-Gitter angepasst. Wie beschrieben führt das bei der Bildanalyse aber zu Artefakten.

**Bemerkung 3.21** Es gibt eine alternative Konstruktion gerichteter Wavelets [Ant98]. Hierbei wird der Ansatz integrierter Wavelets nur für die Dilatation genutzt, Rotation dagegen willkürlich diskretisiert. Wesentlich für die Rekonstruktion ist nur die Partition der Eins in (3.7). Statt mit einem gerichteten Wavelet, starten wir mit einem isotropen Wavelet  $\psi$ , welches auf ein isotropes integriertes Wavelet  $\Psi^j$  führt. Die Richtungsselektivität erzeugt nun eine frei wählbare Partition der Eins  $\{\eta_l\}_{l \in L}$  des  $SO(m)$ . Das bedeutet, sie muss  $\sum_{l \in L} |\eta_l(\rho)|^2 = 1$ ,  $\forall \rho \in SO(m)$  erfüllen.

Seien zum Beispiel  $k_1, \dots, k_n \in SO(2)$  Punkte auf dem Kreis und  $k_{min}$  der halbe minimale Abstand zwischen zwei solchen Punkten. Wir definieren für  $\rho \in SO(2) \cong \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\eta_l(\rho) := \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\rho - k_l}{k_{min}}\pi\right) & \text{falls } \rho \in [k_l, k_l + k_{min}], \\ 1 & \text{falls } \rho \in [k_l + k_{min}, k_{l+1} - k_{min}], \\ \sin^2\left(\frac{k_{l+1} - \rho}{k_{min}}\pi\right) & \text{falls } \rho \in [k_{l+1} - k_{min}, k_{l+1}]. \end{cases}$$

Dabei sind die Intervalle als Teilmengen zyklisch fortgesetzt zu interpretieren.

Damit die Partition nicht zu willkürlich ist, kann gefordert werden, dass die Partition durch die Operation einer diskreten Untergruppe  $S = \{s_1, \dots, s_{|L|}\} < SO(m)$  erzeugt wird, d. h.  $\eta_l = s_l \circ \eta_0$ ,  $\forall l \in L$

Das orientierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  wird dann im Fourier-Raum definiert durch

$$\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega) := \widehat{\Psi^j}(|\omega|)\eta_l(\arg(\omega)), \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m.$$

Es gilt weiterhin, analog zu (3.7), die Partition:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} |\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 = 1, \quad \text{für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m. \quad (3.13)$$

Eine solche Konstruktion trägt a priori keine Wavelet-Struktur bezüglich der Orientation. In Abschnitt 4.3 wird untersucht, unter welchen Bedingungen durch die Operation einer diskreten Untergruppe von Rotationen erzeugte Partitionen bereits integrierte Wavelets sind, also auch als durch Integration über ein Wavelet erzeugt verstanden werden können.

□

**Beispiel 3.22** Typische Richtungsfilter für die kontinuierliche Wavelet-Transformation sind Cauchy-Wavelets, wie von J.-P. Antoine et. al. [AM96, Ant98, AMV99] untersucht. Wir konstruieren ein Analogon zu Cauchy-Wavelets, welches in Polarkoordinaten separabel ist. Zu diesem kann explizit ein integriertes Wavelet angegeben werden.

Seien  $\alpha, \beta \in SO(2)$ ,  $\alpha < \beta$  und  $\beta - \alpha < \pi$ .  $\tilde{\alpha} := \alpha + \pi/2$ ,  $\tilde{\beta} := \beta - \pi/2$ . Weiter sei  $C_{\alpha, \beta} \subset \widehat{\mathbb{R}^2}$  der von Einheitsvektoren  $e_\alpha$  und  $e_\beta$  aufgespannte Konus. Cauchy-Wavelets sind dann im Fourier-Bereich definiert durch

$$\hat{\psi}(\omega) := \begin{cases} \langle \omega, e_{\tilde{\alpha}} \rangle \langle \omega, e_{\tilde{\beta}} \rangle e^{-\langle \omega, \eta \rangle} & \text{falls } \omega \in C_{\alpha, \beta}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^2}$$

Wir definieren eine Variante, welche in Polarkoordinaten separabel ist. Sei dazu  $\alpha > 0$  beliebig und

$$\eta(\rho) := \begin{cases} \cos^2(\rho/\alpha) & \text{falls } \rho \in [-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Wavelet ist definiert durch

$$\hat{\psi}(\omega) := \|\omega\| e^{-\|\omega\|} \eta(\arg(\omega)), \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^2}.$$

In Abbildung 3.3 werden beide Wavelets gegenübergestellt. □

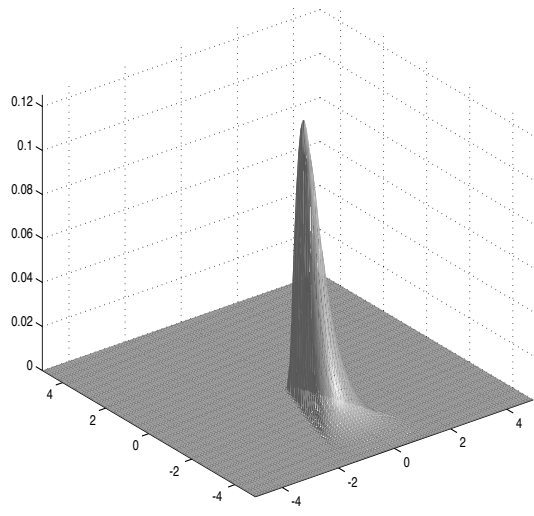
**Beispiel 3.23** Abbildung 3.4 zeigt zwei verschiedene Richtungsfilter, welche nach obiger Bemerkung konstruiert sind. Die Partition der  $SO(2)$  in zwei Orientierungen wird für beide Filter durch

$$\eta_x(\rho) := \cos^2(\rho)$$

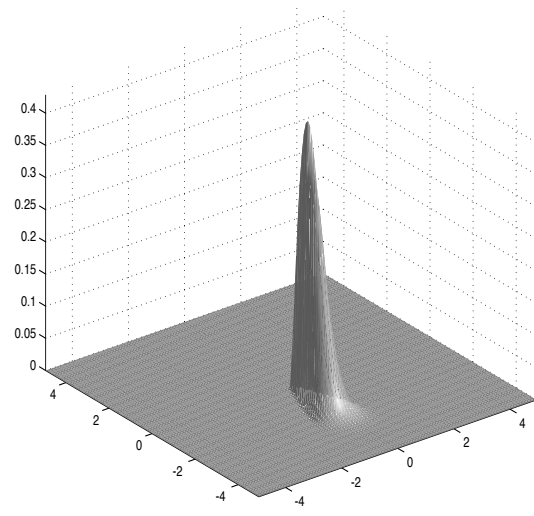
und

$$\eta_y(\rho) := \sin^2(\rho)$$

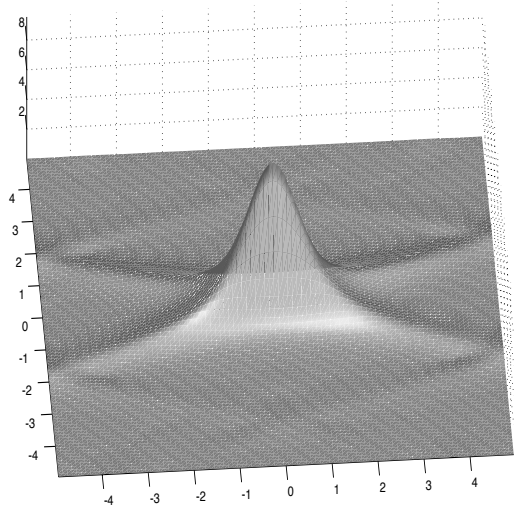
erzeugt. Die zugehörigen eindimensionalen integrierten Wavelets sind das Gauß-Wavelet aus Beispiel 3.14 sowie das Kantenwavelet aus Beispiel 3.20. Diese Wavelets werden in den Beispielen zu Kapitel 6 verwendet. □



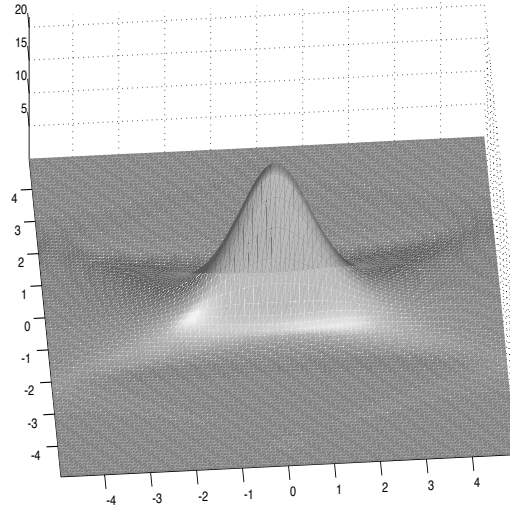
(a)



(b)

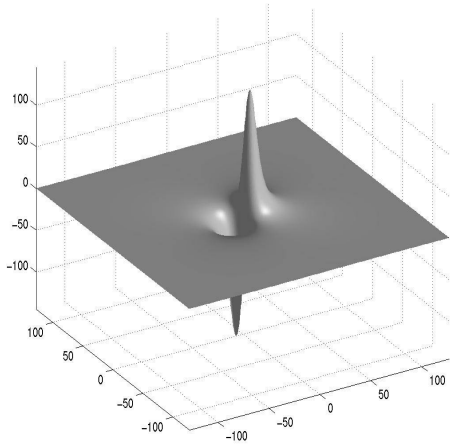


(c)

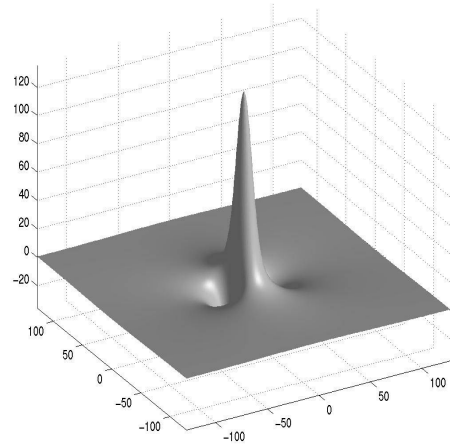


(d)

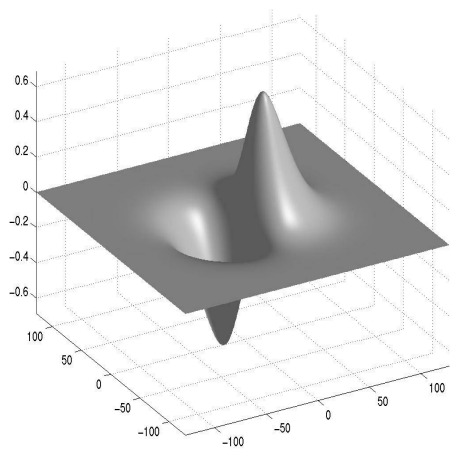
**Abbildung 3.3: Polar-separables Analogon zum Cauchy-Wavelet.** Links ein Cauchy-Wavelet, (a) im Fourier-Raum, (c) im Zeitbereich. Rechts ein in Polarkoordinaten separables Analogon, (b) im Fourier-Raum, (d) im Zeitbereich. Dargestellt ist jeweils der Betrag der Funktion.



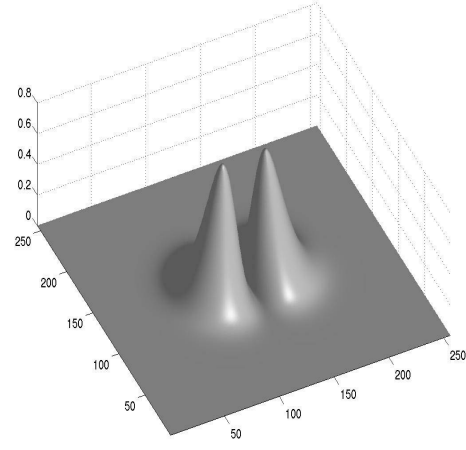
(a)



(b)



(c)



(d)

**Abbildung 3.4: Beispiel für integrierte Richtungsfilter.** Dargestellt sind aus dem eindimensionalen Gauß-Wavelet aus Beispiel 3.14 sowie dem Kantenfilter aus Beispiel 3.20 erzeugte Richtungsfilter, wie in Beispiel 3.23 beschrieben. (a) Das Kantenfilter im Zeitbereich und (c) der Imaginärteil im Fourier-Raum. (b) Das Gauß-Wavelet im Zeitbereich und (d) im Fourier-Raum.

### 3.3 Ein kontinuierliches Analogon zur Multiskalenanalyse

Die Motivation für die Definition von Skalierungsfunktion und integriertem Wavelet in [DDMT93] ist, Begriffe der Multiskalenanalyse, vgl. Abschnitt 2.1, auf die kontinuierliche Transformation zu übertragen. Dieser Zusammenhang wird kurz vorgestellt. Wir ignorieren in diesem Abschnitt den Rotationsparameter.

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein infinitesimales Wavelet und  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$  wie in (3.1). Definiere den Faltungsoperator  $P_a$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  durch  $P_a(f) := D_a r * f, a \in \mathbb{R}_+^*$ . Weiter sei für das zugehörige integrierte Wavelet  $\Psi^j, j \in \mathbb{Z}$  der Faltungsoperator  $Q_j$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  im Fourier-Bereich definiert als Multiplikation mit  $\widehat{Q_j} := |\widehat{\Psi^j}|^2, j \in \mathbb{Z}$ .

Der Raum

$$V_a := P_a(L^2(\mathbb{R}^m)), \quad a \in \mathbb{R}_+^*,$$

besteht genau aus den Skalen  $s_a(f), f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Es gilt:

**Lemma 3.24** (i) Die Räume  $V_a$  fallen monoton, d. h.  $a < a' \Rightarrow V_a \supset V_{a'}$ .

(ii) Es gilt  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} V_a = L^2(\mathbb{R}^m)$  sowie  $\bigcap_{a \in \mathbb{R}_+^*} V_a = \{0\}$ .

(iii)  $V_a$  ist translationsinvariant, d. h.  $f \in V_a \Rightarrow T_b f \in V$  für alle  $b \in \mathbb{R}^m$ .

(iv) Für integrierte Wavelets sei

$$W_j := Q_j(L^2(\mathbb{R}^m)), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

$W_j$  besteht genau aus den diskreten Details  $D^j(f), f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Es gilt

$$V_{a_{j+1}} = V_{a_j} + W_j. \tag{3.14}$$

**BEWEIS** Der Zusammenhang wird in [DDMT93] für die affine Gruppe vorgeführt. (i) Die Funktion  $|\hat{\varphi}|^2 = \hat{r}$  ist nach (3.2) für wachsendes  $\omega$  monoton fallend. Damit gilt für alle  $0 < a < a'$ :  $\hat{p}_{a'}(\omega)/\hat{p}_a(\omega) < 1$ . Sei nun  $g \in V_{a'}$ . Dann gibt es ein  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  mit  $\hat{g} = \hat{f}\hat{r}_{a'} = (\hat{f}\frac{\hat{r}_{a'}}{\hat{r}_a})\hat{r}_a$ , also  $g \in V_a$ .

Aussage (iii) folgt analog.

(ii) Für  $a \rightarrow 0$  konvergiert  $\widehat{D_a r}$  gegen  $\hat{r}(0) = c_\psi$ . Umgekehrt fällt  $\hat{r}$  für  $a \rightarrow \infty$  monoton gegen Null.

(iv) Das diskrete Detail ist die Differenz zweier Skalen,  $|\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega)|^2 = |D_{a_{j+1}}\hat{\varphi}(\omega)|^2 - |D_{a_j}\hat{\varphi}(\omega)|^2$ , also im Zeitbereich  $d_j(f) = s_{j+1}(f) - s_j(f)$ .  $\square$

Der Unterschied zur Multiskalenanalyse aus Definition 2.1 liegt in folgenden Punkten:

(i) Die Räume  $V_j$  sind i. a. nicht abgeschlossen.

- (ii) Im Gegensatz zur MSA ist  $P_j$  i. a. keine Orthogonalprojektion.  $W_j$  ist deshalb nicht orthogonales Komplement von  $V_j$ , die Summe in (3.14) ist nicht direkt. Es gilt nur  $V_{a_j} = \sum_{i < j} W_i$ .
- (iii) Es fehlt eine Skalierungsgleichung (2.2). Diese ist Grundlage für den bekannten schnellen Algorithmus der DWT. Es gibt aber einen approximativen Ansatz, der ohne Skalierungsgleichung auskommt. Dieser wird in Abschnitt 3.5 vorgestellt.

### 3.4 Morlet-integrierte Wavelet-Transformation

In Abschnitt 1.6 wurde die Morlet-Rekonstruktion als besonders einfache Rekonstruktion vorgestellt. Um diese auch für integrierte Wavelets nutzen zu können, muss die Diskretisierung anders gewählt werden. Dies führt auf die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation. Die Begriffe sind gleichlautend der integrierten Wavelet-Transformation, jedoch leicht anders definiert.

**Definition 3.25** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  Morlet-zulässig. Sei  $r$  definiert durch

$$r(x) := \frac{1}{\|x\|^m} \int_{\|y\| < \|x\|} \tilde{\psi}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad (3.15)$$

Falls gilt  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$ , dann heißt  $\psi$  **Morlet-infinitesimales Wavelet**.

**Definition 3.26** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  Morlet-zulässig mit Zulässigkeitskonstante  $k_\psi$  (vgl. Definition 1.36) und  $(a, \rho) \in \mathbb{R}_+^* \times SO(m)$ .

Die Funktion  $d(f)_{a,\rho} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,

$$d(f)_{a,\rho}(x) := \frac{1}{k_\psi} \langle f, U_{(x,a,\rho)} \psi \rangle,$$

heißt **Detail** von  $f$  in  $(a, \rho)$ .

Die **Skalierungsfunktion**  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ist im Fourier-Raum definiert durch

$$\hat{\varphi}(\omega) := \hat{r}(\omega) = \int_1^\infty \widehat{D_u R_\rho \psi}(\omega) \frac{d\rho du}{u}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}.$$

Sei  $r \in L^1(\mathbb{R}^m)$ . Dann ist die **Skala**  $s(f)_a \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $a > 0$ , definiert durch

$$s(f)_a := f * D_a r.$$

In diesem Fall gilt

$$s(f)_a(x) = \frac{1}{k_\psi} \langle f, U_{(x,a,\rho)} \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (3.16)$$

### Bemerkungen 3.27

- (a) Das Detail  $d(f)_{a,\rho}$  liegt in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , da es durch Faltung mit  $\psi$  entsteht und  $\psi$  integrierbar gewählt ist. Die Skala  $s(f)_a$  liegt in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , da  $r$  integrierbar ist.
- (b) Da weiter  $\hat{r} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$  folgt  $\hat{r} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Somit folgt für die Skalierungsfunktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

**Bemerkung 3.28** Es gilt, analog zur integrierten Transformation, auch für die Morlet-integrierte Transformation für ein isotropes Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  der Zusammenhang  $\hat{\psi}(\omega) = -\omega \frac{d}{d\omega} \varphi(\omega)$ ,  $u > 0$ . Dies folgt mit der Bezeichnung  $S_\psi$  für die Stammfunktion von  $a \mapsto \frac{\psi(a)}{a}$  und  $e$  für den Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^m$  aus

$$\frac{d}{d\omega} \varphi(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{\|\omega\|}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(ae)}{a} da = \frac{d}{d\omega} [0 - S_\psi(\omega)] = -\frac{\psi(\omega)}{\omega}.$$

Im Gegensatz zur integrierten Transformation kann dieser Zusammenhang auch im Zeitbereich und damit für Wavelet-Koeffizienten ausgedrückt werden. Es gilt

$$d(f)_a(x) = -a \frac{d}{da} s(f)_a(x)$$

□

**Proposition 3.29** *Der Zusammenhang zwischen Skala und Detail im Zeitbereich lautet*

$$s(f)_a(x) = \int_a^\infty \int_{SO(m)} d(f)_{(u,\rho)}(x) \frac{d\rho du}{u}.$$

**BEWEIS** Der Beweis verläuft analog zu Proposition 3.8. Ein Beweis für den eindimensionalen Fall findet sich auch in [MT95]. □

Eine Skala  $a$  ist also Summe aller größeren Details.

Mit der Notation in Skalen erhalten wir aus der Normkonvergenz der Morlet-Rekonstruktionsformel in Satz 1.41 das

**Korollar 3.30** *Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Morlet-infinitesimales Wavelet. Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  gilt in  $L^2(\mathbb{R}^m)$*

$$f = \lim_{a \rightarrow 0} s(f)_a.$$

Nun wird die Dilatationsgruppe  $H = \mathbb{R}_+^* \times SO(m)$  diskretisiert. Die Operation der Translation bleibt kontinuierlich. Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  eine streng monoton fallende Folge in  $\mathbb{R}_+^*$  mit  $\lim_{j \rightarrow -\infty} a_j = \infty$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ . Weiter sei  $(K_l)_{l \in L}$  Partition von  $SO(m)$ , wobei  $L$  eine diskrete Indexmenge ist.



**Definition 3.31** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  Morlet-zulässig. Die Funktion  $\Psi^{j,l} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , im Fourier-Raum definiert durch

$$\widehat{\Psi^{j,l}}(\omega) := \frac{1}{k_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} \widehat{\mathcal{D}_a R_\rho \psi}(\omega) \frac{d\rho da}{a}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}, \quad (3.17)$$

heißt **Morlet-integriertes Wavelet**.

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  Morlet-zulässig. Die Funktion  $D_{j,l}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$D_{j,l}(f)(x) := \frac{1}{k_\psi} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \int_{K_l} d_{(\rho,a)}(x) \frac{d\rho da}{a}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

heißt **Morlet-diskretes Detail von  $f$  in  $(j,l) \in \mathbb{Z} \times L$** .

Aufgrund der Morlet-Zulässigkeitsbedingung erhält man unmittelbar eine Partition der Eins im Fourier-Raum durch

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \widehat{\Psi^{j,l}}(\omega) = 1 \quad \text{für fast alle } \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}. \quad (3.18)$$

**Definition 3.32** Sei  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  ein Morlet-integriertes Wavelet zu einer Morlet-zulässigen Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} WT_\Psi^M : L^2(\mathbb{R}^m) &\rightarrow l^2(L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z} \times L)) \\ f &\mapsto \langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle, \quad b \in \mathbb{R}^m, (j,l) \in \mathbb{Z} \times L, \end{aligned}$$

heißt **Morlet-integrierte Wavelet-Transformation**.

**Bemerkung 3.33** Im kontinuierlichen Fall gibt es zwei Rekonstruktionsformeln, klassische und Morlet-Rekonstruktion, die auf derselben Transformierten erklärt sind. Bei der Diskretisierung wird nun die Art der Rekonstruktion berücksichtigt. Damit hängt die integrierte Transformation von der Wahl der Rekonstruktion ab. Das führt dazu, dass sich zu einem Wavelet  $\psi$  das integrierte und das Morlet-integrierte Wavelet unterscheiden. Ebenso sind die Skalierungsfunktionen unterschiedlich.  $\square$

Zusammenfassend gilt:

**Satz 3.34** [MT95] Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Morlet-infinitesimales Wavelet. Dann gilt für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  im schwachen Sinn

$$f(x) = \langle f, T_x D_{j_0} \varphi \rangle + \sum_{j=j_0}^{\infty} \langle f, T_x \Psi^j \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Interpretiert man die Summation als Limes, so gilt auch die Identität in der Norm.

Der Beweis folgt mit Proposition 1.38 im schwachen Sinn und mit Satz 1.39 in der Norm. Im Gegensatz zu integrierten Wavelets muss bei Morlet-integrierten die Phase nicht separat behandelt werden. Dies liegt an der im Fourier-Raum eindeutigen Definition des Morlet-integrierten Wavelets. Daraus ergeben sich zwei wesentliche Vorteile: Morlet-integrierte Wavelets können leicht auch im Zeitbereich angegeben werden und es gibt kein Problem mit der durch die Phase bestimmten Lokalisierung des Morlet-integrierten Wavelets. Insbesondere zeigt das folgende Lemma den Zusammenhang zwischen Morlet-integrierter und kontinuierlicher Transformation auf. Das Lemma ist nur für den affinen Fall formuliert, die mehrdimensionale Variante sieht analog aus.

**Lemma 3.35** *Es gilt für alle  $j \in \mathbb{Z}$*

$$(i) \quad \langle f, T_b \Psi^j \rangle = \left\langle f, \int_{a_j}^{a_{j+1}} T_b D_a \psi \frac{da}{a} \right\rangle = \int_{a_j}^{a_{j+1}} WT_\psi f(b, a) \frac{da}{a}.$$

$$(ii) \quad \lim_{a_{j+1} \rightarrow a_j} \frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \langle f, T_b \Psi^j \rangle = WT_\psi f(b, a_j).$$

**BEWEIS** (i) Die Integration über  $a$  vertauscht mit Translation und Skalarprodukt. (ii) Mit (i) lässt sich das Integral vor das Skalarprodukt ziehen. Da Wavelet-Koeffizienten stetig sind, folgt der Rest durch elementare Integralabschätzung.  $\square$

Aussage (ii) ist analog zu Satz 3.19. Dagegen ist ein Analogon zu (i) für integrierte Wavelets nicht möglich. In Abschnitt 3.7 werden wir die durch (i) gegebene Interpretation der Morlet-integrierten Wavelet-Transformation als gemittelte kontinuierliche Wavelet-Koeffizienten nutzen, um Aussagen über die Charakterisierung der globalen und punktwisen Lipschitz-Regularität durch die Morlet-integrierte Transformation zu zeigen.

**Beispiel 3.36** Beispiele für Morlet-integrierte Wavelets auf  $G = \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_+^* \times SO(m))$  sind:

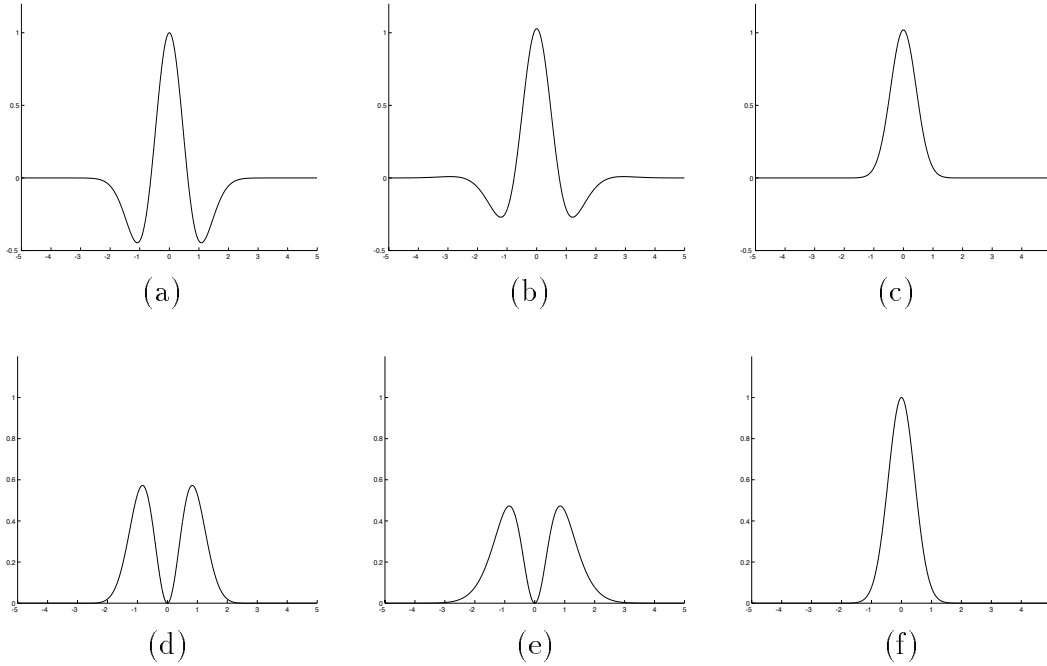
- (i) **Gauß-Wavelet.** Das Gauß-Wavelet, gegeben durch  $\psi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - x^2)e^{-\|x\|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , ist Morlet-zulässig. Das zugehörige Morlet-integrierte Wavelet lautet nach Formel (3.17)

$$\Psi^j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{a_j}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2a_j^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{j+1}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2a_{j+1}^2}} \right).$$

Die Skalierungsfunktion für die Morlet-integrierte Transformation lautet  $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\|x\|^2/2}$ , das ist genau die Gauß-Funktion. In Abbildung 3.5 sind die Funktionen dargestellt.

- (ii) **Poisson Wavelet.** Das Poisson Wavelet ist im Fourier-Raum definiert durch  $\hat{\psi}(\omega) := \|\omega\| e^{-\|\omega\|}$ ,  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}^m$ . Das Wavelet ist isotrop. Das Morlet-integrierte Wavelet ist nach Formel (3.17) gegeben durch  $\widehat{\Psi}^j(\omega) = e^{-a_{j+1}\|\omega\|} - e^{-a_j\|\omega\|}$ , im Zeitbereich

$$\Psi^j(x) = \frac{2a_{j+1}}{a_{j+1}^2 + x^2} - \frac{2a_j}{a_j^2 + x^2}.$$



**Abbildung 3.5: Morlet-integriertes Gauß-Wavelet.** (a) Das Gauß-Wavelet  $\psi$ , (b) das Morlet-integrierte Gauß-Wavelet  $\Psi^0$ , mit  $a_0 = 1$  und  $a_1=2$  und (c) die Morlet-Skalierungsfunktion. (d-f) stellen die jeweiligen Fourier-Transformierten dar.

Die Skalierungsfunktion lautet  $\hat{\varphi}(\omega) = e^{-\|\omega\|}$ , bzw  $\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2}$ .

□

**Bemerkung 3.37** Auch bei der Morlet-integrierten Transformation bleibt das Problem, explizite Beispiele für gerichtete Wavelets zu konstruieren. Analog zu Abschnitt 3.2.2 können gerichtete Wavelets durch in Polarkoordinaten separable Funktionen erzeugt werden. Die Richtungsselektivität erzeugt wieder eine Partition der Eins  $\{\eta_l\}_{l \in L}$  des  $SO(m)$ . Es muss, angepasst an die durch (3.18) gegebene andere Partition der Eins bei Morlet-integrierten Wavelets, gelten:  $\sum_{l \in L} \eta_l(\rho) = 1, \forall \rho \in SO(m)$ . □

### 3.5 Approximative Filter

Wir entwickeln einen Pyramidenalgorithmus analog zu dem in Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Mallat-Algorithmus. Es sind hier mehr Wavelets zulässig, da wir auf die Skalierungsgleichung verzichten. Dies führt auf einen Algorithmus, der die Wavelet-Koeffizienten nur

approximiert. Eine exakte Rekonstruktion gibt es nur für die Morlet-integrierte Transformation. Der Ansatz wurde für eindimensionale affine Wavelet in [MT95] entwickelt. Wir verallgemeinern diesen auf höhere Dimensionen. Dabei wird nicht der in [MT95] vorgeschlagene Tensorprodukt-Ansatz mit seinen Nachteilen gewählt. Statt dessen wird auf der vorangegangenen Verallgemeinerung integrierter Wavelets in höhere Dimensionen aufgebaut. Dies erlaubt insbesondere beliebige Richtungsfilter.

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein infinitesimales Wavelet. Wir unterscheiden vorerst nicht zwischen integrierten und Morlet-integrierten Wavelets. Die Skalierungsfunktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  sei gegeben durch (3.3) bzw. (3.16). Wir wählen eine geometrische Partition der Skalen durch  $a_j := 2^j, j \in \mathbb{Z}$ . Das integrierte bzw. Morlet-integrierte Wavelet  $\Psi^l := \Psi^{0,l}$  sei gegeben durch (3.6) bzw. (3.17). Der Index  $l \in L$  steht für die Rotationskomponente. Die Skalierungsfunktion soll analog zur MSA eine Riesz-Basis für den Raum  $V_0$  erzeugen. Wir setzen

$$V_0 := \overline{\text{span}\{T_k\varphi\}_{k \in \mathbb{Z}^m}}^{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

Dabei sei  $\{T_k\varphi\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$  eine Riesz-Basis für  $V_0$ , d.h. es existieren  $A, B > 0$  mit  $A \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B$ .

Bei dem in Abschnitt 2.3 vorgestellten Mallat-Algorithmus wurde angenommen, dass  $\varphi$  einer Skalierungsgleichung genügt und damit Filter  $g^l, h \in l^2(\mathbb{Z}^m), l \in L$  existieren, so dass gilt

$$\begin{aligned} S_{j+1}f &= S_j f * h_j \\ T_{j+1}^l f &= S_j f * g_j^l, \quad l \in L. \end{aligned}$$

Die äquivalente Formulierung im Fourier-Raum lautet

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(2\omega) &= \hat{h}(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \\ \widehat{\Psi}^l(2\omega) &= \hat{g}^l(\omega)\hat{\varphi}(\omega), \quad l \in L. \end{aligned}$$

Dabei sind  $\hat{g}^l, l \in L$  und  $\hat{h}$   $2\pi$ -periodische Funktionen.

Nun haben wir von  $\varphi$  und  $\Psi^l, l \in L$ , nicht gefordert, dass sie eine solche Skalierungsgleichung erfüllen. Trotzdem können analoge Multiplikatoren  $\hat{g}^l$  und  $\hat{h}$  angegeben werden. Diese sind aber im allgemeinen nicht mehr periodisch.

**Definition 3.38** Für  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}$  seien

$$\hat{h}(\omega) := \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} \text{ und } \hat{g}^l(\omega) := \frac{\widehat{\Psi}^l(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}, l \in L. \quad (3.19)$$

**Bemerkung 3.39** Im integrierten Fall ist  $\hat{h}$  wohldefiniert, da  $|\hat{\varphi}|$  nach Bemerkung 3.2 und Formel (3.3) monoton fallend ist, weshalb  $\hat{h}$  durch Eins beschränkt ist. Für Morlet-integrierte Wavelets muss  $\hat{h}$  nicht überall definiert sein. Die punktweise Existenz von  $\hat{g}^l$  ist a priori offen, ebenso die Integrierbarkeit der Funktionen.  $\square$

Wir suchen nun Funktionen  $\widehat{g_{app}^l}$  und  $\widehat{h_{app}} \in L^2([-\pi, \pi]^m)$ , so dass die Produkte  $\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{h}(\omega)$  und  $\widehat{\Psi^l}(\omega)\widehat{g^l}(\omega)$  durch  $\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{h_{app}}(\omega)$  und  $\widehat{\Psi^l}(\omega)\widehat{g_{app}^l}(\omega)$  in der  $L^2$ -Norm auf  $\widehat{\mathbb{R}^m}$  bestmöglich approximiert werden. Wir führen für die approximierenden Funktionen die zu der für den Mallat-Algorithmus verwendeten analoge Notation ein. Seien  $g_{app}^l, h_{app} \in l^2(\mathbb{Z})$ . Bezeichne  $S_0 f(n) := \langle f, T_n \varphi \rangle$  und weiter für alle  $j \geq 1$  und  $l \in L$ :

$$S_1^a f(n) := (h_{app} * S_0 f)(n) \text{ sowie } S_{j+1}^a f(n) := (h_{app_j} * S_j^a f)(n), \quad (3.20)$$

$$T_1^{l^a} f(n) := (g_{app}^l * S_0 f)(n) \text{ sowie } T_{j+1}^{l^a} f(n) := (g_{app_j}^l * S_j^a f)(n). \quad (3.21)$$

Dabei sind  $g_{app_j}^l, h_{app_j}$  definiert durch  $h_{app_j}(2^n) := h_{app}(n), n \in \mathbb{Z}$  und Null sonst.

**Proposition 3.40** [MT95] Für  $S_0 : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^m)$  gilt:

$$\text{Ker}(S_0) = U_0^\perp \text{ sowie } S_j^a(U_0^\perp) = T_j^{l^a}(U_0^\perp) = 0, j \geq 1.$$

Die Proposition besagt, dass die Operatoren  $S$  und  $T$  den Raum  $U_0$  nicht verlassen, unabhängig davon, wie die Filter  $g^l$  und  $h$  gewählt sind. Das in [MT95] für den eindimensionalen Fall formulierte Resultat lautet allgemein:

**Satz 3.41** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein infinitesimales Wavelet,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  die zugehörige Skalierungsfunktion und  $\Psi^l := \Psi^{0,l}, l \in L$  das zur durch  $a_j := 2^j, j \in \mathbb{Z}$ , gegebenen Partition des Dilatationsparameters gehörende integrierte Wavelet.  $g^l, h$  seien die nach Definition 3.38 gegebenen Filter. Weiter seien  $g_{app}^l, h_{app} \in l^2(\mathbb{Z}^m), l \in L$ . Der  $L^2$ -Fehler ist definiert als  $\mu(h, h_{app}) := \left\| (\widehat{h} - \widehat{h_{app}}) \widehat{\Psi} \right\|_{L^2(\widehat{\mathbb{R}^m})}$ . Dann gilt:

- (i) (Existenz und Eindeutigkeit) Es gibt eindeutige  $g_{opt}^l, h_{opt} \in L^2([-\pi, \pi]^m), l \in L$ , die  $\mu$  minimieren. Das sind

$$h_{opt}(\omega) := \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}^*(\omega + 2\pi k) \widehat{\varphi}(2(\omega + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2} \quad (3.22)$$

$$\text{und } g_{opt}^l(\omega) := \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}^*(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^l}(2(\omega + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2}, \quad l \in L.$$

- (ii) (Exakte Filter auf  $U_0$ ) Für alle  $f \in U_0$  mit  $h = h_{opt}$  und  $g^l = g_{opt}^l, l \in L$  gilt  $S_1^a f = S_1 f$ , sowie  $T_1^{l^a} f = T_1^l f$ .
- (iii) (Fehlerabschätzung) Bezeichne  $c_{g^l} := \|g_{opt}^l\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}$  sowie  $c_h := \|h_{opt}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}, l \in L$ . Dann gilt für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\|S_j^a f - S_j f\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^m)} \leq \mu(h_{opt}, h) 2^{(1-j)/2} \frac{1 - (c_h \sqrt{2})^j}{1 - c_h \sqrt{2}} \|f\|_2, \quad \text{sowie}$$

$$\|T_j^{l^a} f - T_j^l f\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^m)} \leq 2^{(1-j)/2} \left( \mu(g_{opt}^l, g) + c_{g^l} \mu(h_{opt}, h) c_{g^l} \sqrt{2} \frac{1 - (c_h \sqrt{2})^{j-1}}{1 - c_h \sqrt{2}} \right) \|f\|_2,$$

wobei  $l \in L$ .

BEWEIS In [MT95] wurde der eindimensionale Fall gezeigt. Hier wird zusätzlich die in höheren Dimensionen mögliche Rotation betrachtet. Bezeichne zur einfacheren Unterscheidung  $\hat{f}^\mathbb{T}$  die Fourier-Transformation auf dem Torus. (iii) Es gilt  $\|f\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^m)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|\hat{f}^\mathbb{T}\|_{L^1(-\pi, \pi)}$ . Mit der Poisson-Summationsformel (vgl. Anhang)

$$\widehat{S_0 f}^\mathbb{T}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \widehat{S_0 f}^\mathbb{R}(\omega + 2\pi k)$$

kann abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \|S_j^a f - S_j f\|_{l^\infty(\mathbb{Z}^m)} &\leq \int_{[-\pi, \pi]^m} |\widehat{h_{app}}(\omega) \widehat{S_0 f}^\mathbb{T}(\omega) - \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h(k) S_0 f(n-k) \right)^\mathbb{T}(\omega)| d\omega \\ &\leq \int_{[-\pi, \pi]^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{h_{app}}(\omega) - \hat{h}(\omega + 2\pi k)| \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) \hat{f}(\omega + 2\pi k) d\omega \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \left\| \widehat{h_{app}} - \hat{h} \hat{\varphi} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \mu(h_{app}, h) \|f\|_2. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt mit der Parseval-Formel

$$\left\| (\widehat{h_{app}} - \hat{h}) \hat{\varphi} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \left\| \widehat{h_{app}} \hat{\varphi}^\mathbb{R} - \hat{\varphi}(2\bullet) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \left\| \widehat{h_{app}} \hat{\varphi}^\mathbb{R} - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\bullet}{2}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

Dieser Ausdruck ist über  $h_{app} \in L^2([-\pi, \pi]^m)$  zu minimieren.

$$\min_{h \in l^2(\mathbb{Z}^m)} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h^a(k) \varphi(x-k) - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\bullet}{2}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \min_{\gamma \in V_0} \left\| \gamma - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\bullet}{2}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

Der Raum  $V_0$  ist abgeschlossen in  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass das Minimum durch ein eindeutig bestimmtes  $\gamma_0$  angenommen wird, welches  $\gamma_0 - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\bullet}{2}\right) \in V_0^\perp$  erfüllt. Also muss gelten

$$\left\langle \varphi(\bullet - k), \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h^a(k) \varphi(\bullet - k) - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\bullet}{2}\right) \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m.$$

Erneute Anwendung der Poisson-Summationsformel führt auf (3.22).

Die Rechnung für  $g_{opt}^l$ ,  $l \in L$  verläuft analog.

(i) Sei  $f \in V_0$ , d. h.  $\hat{f} = F \hat{\varphi}$  für eine Funktion  $F \in L^2([-\pi, \pi]^m)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \widehat{S_j^a f}^\mathbb{T} - \widehat{S_j f}^\mathbb{T}(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left( \widehat{h_{app}}(\omega) - \hat{h}(\omega + 2\pi k) \right) |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 F(\omega) \\ &= 0, \end{aligned}$$

falls  $h_{app} = h_{opt}$  eingesetzt wird. □

Der Satz besagt bisher nur, dass approximierende Filter gefunden werden können, die den Fehler zur exakten Transformation in einem gewissen Sinn minimieren. Bisher existiert aber keine Rekonstruktion, die wichtigste Eigenschaft einer Diskretisierung. Hier sind integrierte und Morlet-integrierte Transformation getrennt zu betrachten. Für die Morlet-integrierte Transformation ist eine Rekonstruktion elegant möglich.

**Korollar 3.42** *Für Morlet-integrierte Wavelets gilt  $h_{opt} + \sum_{l \in L} g_{opt}^l = 1$ . Daraus folgt für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$*

$$S_0 f(n) = \sum_{j \geq 0} \sum_{l \in L} T_j^{l^a}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^m.$$

**BEWEIS** In [MT95] wurde der eindimensionale Fall ohne Rotation gezeigt. Nach Definition 3.38 gilt  $\hat{h} + \sum_{l \in L} \hat{g}^l = 1$ . Interessant an diesem Korollar ist, dass sich diese Eigenschaft auf die optimalen approximierten Filter überträgt. Setzt man diese Identität in Proposition 2.23 mit den speziellen Rekonstruktionsfiltern  $g_{rek}^l = h_{rek} = \delta_0$ ,  $l \in L$ , ein, so erhält man für  $n \in \mathbb{Z}^m$

$$S_j^a(n) = S_{j+1}^a * h_{rek_j}(n) + \sum_{l \in L} T_{j+1}^{l^a} * g_{rek_j}^l(n) = S_{j+1}^a(n) + \sum_{l \in L} T_{j+1}^{l^a}(n) = \sum_{k \geq j} \sum_{l \in L} T_k^{l^a}(n).$$

□

Obwohl die Filterpyramide die Wavelet-Koeffizienten nur approximieren, erhält man im Fall der Morlet-integrierten Transformation eine exakte Rekonstruktion. Für die Implementation ist aber die dyadische Skala zwingend. Der Vorteil der Konstruktion liegt in der großen Freiheit bei der Wahl des Wavelets.

### Bemerkungen 3.43

- (a) Im integrierten Fall gilt für die approximierten Filter i. a. nicht die für die Rekonstruktion notwendige Identität  $|h_{opt}|^2 + \sum_{l \in L} |g_{opt}^l|^2 = 1$  (vgl. Abschnitt 2.3.2), obwohl auch hier für die in 3.38 definierten Filter gilt  $|\hat{h}|^2 + \sum_{l \in L} |\hat{g}^l|^2 = 1$ .

Das bedeutet, die approximierten Filter verlieren in diesem Fall eine wichtige Eigenschaft. Wir zeigen in Abschnitt 3.6, dass integrierte Wavelets feste Frames erzeugen. Dies erlaubt dann die Umsetzung in einem schnellen und exakten Algorithmus.

- (b) Es gibt analog zum in Abschnitt 2.3 vorgestellten Mallat-Algorithmus eine Verallgemeinerung von J.-P. Antoine mit interpolierenden Skalen [Ant98]. Dazu wird das Skalenintervall  $[1/2, 1]$  partitioniert in  $a_0 = 1/2 < a_1 < \dots < a_n = 1$ . Die Integration über die Teilintervalle  $[a_n, a_{n+1}]$  führt auf  $n$  integrierte Wavelets. Für diese kann nun separat die oben beschriebene Filterpyramide berechnet werden. Im Morlet-integrierten Fall existiert eine Rekonstruktion analog zu Korollar 3.42.

Wie effizient ist der vorgestellte Algorithmus? Wir vergleichen die Komplexität auf einem endlichen Gitter  $\{0, \dots, M\}^m$  und periodischer Faltung mit der der schnellen Fourier-Transformation.

**Lemma 3.44** Sei  $\{0, \dots, M\}^m$  endliches Gitter. Die Komplexität der Berechnung einer Skala durch Falten mit Hilfe approximierter Filter ist  $\mathcal{O}(|L|KM^m)$ . Dabei bezeichnet  $|L|$  die Zahl der Richtungen,  $K := \max\{k_l ; l \in L\}$  und  $k_l$  die Zahl der nichtverschwindenden Koeffizienten des Filters  $g_l$ .

BEWEIS Es sind  $|L|$  Faltungen zu berechnen. Jede Faltung in Formel (3.21) trägt  $k_l M^m$  Multiplikationen bei.  $\square$

Die Komplexität der schnellen Fourier-Transformation auf  $\mathbb{Z}_M^m$  ist bei  $M = 2^j$  optimal  $\mathcal{O}(mM^m \log M)$ . Sie ist ebenfalls für jede Richtung  $l \in L$  zu berechnen. Damit ist der Faltungsalgorithmus nur dann schneller als die Fourier-Transformation, falls  $K < m \log M$ . Dies bedeutet, die Filterlänge muss im Vergleich zur Bildgröße sehr klein sein. Bei einer Bildgröße von  $M = 4096$  Pixeln Kantenlänge und zweidimensionaler Rechnung dürfte der Filter nur ca. 16 nichtverschwindende Koeffizienten auf dem Gitter  $\mathbb{Z}_M^2$  besitzen.

Die Hoffnung, schnelle Pyramidenschemata auch für redundante Wavelet-Transformationen sinnvoll zu nutzen, erfüllt sich also nicht. Eine Implementation über die schnelle Fourier-Transformation, wie sie in Abschnitt 6.6 vorgestellt wird, ist einfach und flexibel. Sie ist damit komplizierten Faltungsalgorithmen, die nur für kurze Filter optimal sind und deren Koeffizienten erst mühsam zu berechnen sind, überlegen.

Ebenso fällt bei Fourier-basierten Algorithmen die Beschränkung auf eine Pyramidenstruktur weg, wie bereits in Abschnitt 2.2 ausgeführt wurde.

## 3.6 Konstruktion fester Frames

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass integrierte Wavelets kanonisch auf feste Frames führen. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind neu. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 4 im allgemeineren Kontext erneut aufgegriffen.

Bisher wurde nur der Dilatationsparameter diskretisiert. Das bietet die Gelegenheit, den Unterschied zu den in Kapitel 2 eingeführten dyadischen Wavelets aufzuzeigen. Erinnern wir uns an Satz 2.15. Nun das analoge Resultat für integrierte Wavelets über  $G = \mathbb{R}^m \rtimes (SO(m) \times \mathbb{R}_+^*)$ .

**Satz 3.45** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Weiter sei  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  integrierten Wavelets  $\Psi^{j,l}$ . Dann gilt

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \|\langle f, T_x \Psi^{j,l} \rangle\|^2 = \|f\|^2,$$

wobei die Norm auf der linken Seite über  $x \in \mathbb{R}^m$  zu nehmen ist. Eine Rekonstruktion in der  $L^2$ -Norm erhält man durch

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} (\langle f, T_\bullet \Psi^{j,l} \rangle * \Psi^{j,l})(x). \quad (3.23)$$



BEWEIS Wir multiplizieren die Partition der Eins (3.7) mit  $|\hat{f}(\omega)|^2$ :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \left| \widehat{\Psi}^{j,l}(\omega) \hat{f}(\omega) \right|^2 = |\hat{f}(\omega)|^2$$

Integration über  $\omega$  auf beiden Seiten und Anwendung der Parseval Identität ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} \left| \widehat{\Psi}^{j,l}(\omega) \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\mathbb{R}^m} |f * \widetilde{\Psi}^{j,l}(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \|\langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle\|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Die Rekonstruktion (3.23) ist nur eine Umformulierung von (3.8).  $\square$

Jedes Wavelet erzeugt also eine Familie fester Faltungsoperatoren bei beliebiger Diskretisierung des Dilatationsparameters.

Wir diskretisieren nun auch die Operation der Translationen  $\mathbb{R}^m$ . Für praktische Anwendungen kann man ein diskret gegebenes Signal als bandbeschränkte Funktion auffassen, ein Bild also als Element des Paley-Wiener Raumes  $PW_{[-\pi, \pi]^m}$ .

**Satz 3.46** Sei  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  ein integriertes Wavelet. Die Familie  $\{T_b \Psi^{j,l}; b, j \in \mathbb{Z}, l \in L\}$  ist ein fester Frame für den Paley-Wiener Raum  $PW_{[-\pi, \pi]^m}$ .

BEWEIS Die Beweisidee beruht auf einer Konstruktion, wie sie z. B. in Heil und Walnut [HW89, Theorem 5.1.3] vorgestellt wird. Zentrale Idee ist, die Integration auf ein Kompaktum zurückzuziehen.

Sei  $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi]^m$ , dann gilt

$$\langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle = f * \widetilde{\Psi}^{j,l}(b) = \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} \hat{f}(\omega) \widehat{\Psi}^{j,l}(\omega) e^{ib\omega} d\omega = \left\langle \widehat{f \Psi}^{j,l}, E_b \right\rangle_{L^2([- \pi, \pi]^m)},$$

wo  $E_b := \exp(-ib\omega)$  den Modulationsoperator bezeichnet. Es folgt mit der Plancherel-Formel für Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \sum_{b \in \mathbb{Z}} |\langle f, T_b \Psi^{j,l} \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \|\widehat{f \Psi}^{j,l}\|_{L^2([- \pi, \pi]^m)}^2 = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} |\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$\square$

**Bemerkung 3.47** Der Begriff Frame wird hier nicht exakt im definierten Sinn verwendet, da die den Frame aufspannenden Funktionen aus dem größeren Raum  $L^2(\mathbb{R}^m)$  stammen dürfen.  $\square$

Der besondere Vorteil dieser Frame-Konstruktion gegenüber klassischen Konstruktionen ist, dass die Freiheit zur Wahl einer beliebigen Diskretisierung der Skala besteht, dabei trotzdem garantiert feste Frames entstehen. Ebenso ist die Operation der Translation äquidistant diskretisiert, wie es für die Bildanalyse benötigt wird.

Um einen festen Frame für  $L^2(\mathbb{R}^m)$  zu erhalten, müssen wir die Forderung der Kompaktheit von  $f$  auf das Wavelet  $\psi$  übertragen. Hier muss die Freiheit in der Diskretisierung der Skala aufgegeben werden, damit der Dilatationsoperator statt auf  $\psi$  durch den adjungierten Operator auf der Funktion  $f$  operiert. Weiter ist die Diskretisierung der Translationen nicht mehr äquidistant.

**Proposition 3.48** *Die Dilatationen  $\mathbb{R}_+^*$  seien geometrisch diskretisiert für ein  $\lambda > 1$  und  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  ein integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Dann gilt*

$$\mathcal{D}_{\lambda^j} \Psi^{0,l} = \lambda^{j/2} \Psi^{j,l}.$$

BEWEIS Dilatation vertauscht mit der Wurzel bis auf einen Faktor, es gilt  $\mathcal{D}_a \sqrt{f(x)} = a^{-1/4} \sqrt{\mathcal{D}_a f(x)}$ . Dilatation und Betragsquadrat vertauschen bis auf das Inverse dieses Faktors. Damit gilt im Fourier-Bereich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda^{-j}} \widehat{\Psi}^{0,l}(\omega) &= \lambda^{j/2} \sqrt{\int_1^\lambda |D_a \widehat{\psi}(\lambda^j \omega)|^2 \frac{da}{a}} = \lambda^{j/2} \sqrt{\int_1^\lambda |\widehat{\psi}(\lambda^j a \omega)|^2 \frac{da}{a}} \\ &\stackrel{a \mapsto \lambda^{-j} a}{=} \lambda^{j/2} \sqrt{\int_{\lambda^j}^{\lambda^{j+1}} |\widehat{\psi}(a \omega)|^2 \frac{da}{a}} = \lambda^{j/2} \sqrt{\int_{\lambda^j}^{\lambda^{j+1}} |\lambda^{-j/2} \widehat{D}_a \widehat{\psi}(\omega)|^2 \frac{da}{a}} \\ &= \lambda^{j/2} \widehat{\Psi}^{j,l}(\omega). \end{aligned}$$

□

Damit lässt sich zeigen:

**Satz 3.49** *Die Dilatationen  $\mathbb{R}_+^*$  seien geometrisch diskretisiert für ein  $\lambda > 1$ . Weiter sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein bandbeschränktes Wavelet, so dass für das zugehörige integrierte Wavelet  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  gilt  $\text{supp } \widehat{\Psi}^0 \subset [-\pi, \pi]^m$ .*

Dann ist

$$\{\mathcal{D}_{\lambda^j} T_b \Psi^{0,l}; b \in \mathbb{Z}^m, j \in \mathbb{Z}, l \in L\}$$

ein fester Frame für  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

BEWEIS Aus  $\langle f, \mathcal{D}_{\lambda^j} T_b \Psi^{0,l} \rangle = \langle \mathcal{D}_{\lambda^j}^* f, T_b \Psi^{0,l} \rangle$  folgt analog zu oben

$$\langle f, \mathcal{D}_{\lambda^j} T_b \Psi^{0,l} \rangle = \langle \mathcal{D}_{\lambda^j}^* \widehat{f} \cdot \widehat{\Psi}^{0,l}, E_b \rangle_{L^2([-\pi, \pi]^m)}.$$

Es bleibt, Gleichung (3.24) für diesen Fall anzupassen. Aufgrund der speziellen Wahl der Diskretisierung gilt  $\lambda^{j/2}\Psi^{j,l} = \mathcal{D}_{\lambda^j}\Psi^{0,l}$  für  $\lambda \neq 0$ . Daraus folgt mit Substitution  $\omega \mapsto \lambda^{-j}\omega$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\mathcal{D}_{\lambda^j}^* \hat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\Psi^{0,l}}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\Psi^{0,l}}(\omega \lambda^{-j})|^2 d\omega \\ &\stackrel{\text{Prop. 3.48}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\Psi^{-j,l}}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bei der Substitution wird aus der Dilatation  $\mathcal{D}$  auf  $\hat{f}$  eine  $L^1$ -normierte Dilatation auf  $\hat{\psi}$ . Der Beweis schließt nun wie in Satz 3.46.  $\square$

**Bemerkung 3.50** Die Voraussetzung an die Diskretisierung der Skala lässt sich abschwächen. Es genügt, eine Partition der Skalen zu wählen, die sich mit der Operation einer diskreten Untergruppe verträgt, mit anderen Worten durch Operation einer diskreten Untergruppe auf einem Repräsentantensystem entsteht. Dies wird in Abschnitt 4.1.2 in einem allgemeineren Kontext ausgeführt.  $\square$

## Zusammenhang zu klassischen Wavelet-Frames

Wie ist nun der Zusammenhang zur Diskretisierung durch Abtasten? Der vorgestellte Ansatz durch Mittelung über Wavelet-Koeffizienten kann auch als Methode zur Konstruktion fester Wavelet-Frames im klassischen Sinn betrachtet werden. Dazu wird die Rotation ebenfalls durch eine Untergruppe diskretisiert.

Festzuhalten ist, dass das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  zu einem Wavelet  $\psi$  selbst wieder zulässig ist.

**Proposition 3.51** *Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Dann ist das integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  für alle  $j$  und  $l$  ebenfalls zulässig.*

**BEWEIS** In Formel (3.6) wird nur über ein Kompaktum  $[a_{j+1}, a_j] \times K_l \subset \mathbb{R}_+^* \times SO(m) =: H$  integriert. Das erlaubt Integralvertauschung. Daraus und mit der Linksinvarianz des Haar-Maßes  $d\mu_H$  folgt

$$\begin{aligned} \int_H \left| \widehat{\Psi^{j,l}}(a\rho(\omega)) \right|^2 d\mu_H(\rho, a) &\leq \int_H \left( \int_{[a_{j+1}, a_j] \times K_l} |\psi(aa'\rho\rho'(\omega))|^2 d\mu_H(rho', a') \right) d\mu_H(\rho, a) \\ &\leq \int_{[a_{j+1}, a_j] \times K_l} c_\psi d\mu_H(\rho', a') \leq |a_{j+1} - a_j| \mu_{SO(m)}(K_L) c_\psi \\ &< \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Damit ist der mit integriertem Wavelet zu einer diskreten Untergruppe von  $H$  konstruierte Frame ein Wavelet-Frame, d. h. die Frame-Elemente sind durch affine Operationen aus einer Funktion generiert (vgl. Definition 2.12).

Diese Beobachtung halten wir in dem folgenden Korollar fest.

**Korollar 3.52** *Sei  $A \times R$  eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}_+^* \times SO(m)$ . Weiter sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein bandbeschränktes Wavelet, so dass für das zugehörige integrierte Wavelet  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  gilt  $\text{supp } \widehat{\Psi}^0 \subset [-\pi, \pi]^m$ . Dann ist*

$$\{\mathcal{D}_a R_\rho T_b \Psi^0; b \in \mathbb{Z}^m, a \in A, \rho \in R\}$$

ein fester Wavelet-Frame für  $L^2(\mathbb{R}^m)$  zu dem Wavelet  $\Psi^0$ .

Das Besondere an dem Ansatz durch Mittelung ist, dass die entstehenden Wavelet-Frames automatisch fest sind, unabhängig davon, mit welchem Wavelet  $\psi$  man die Konstruktion startet.

Für die Konstruktion fester Frames auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  haben wir die Freiheit bei der Diskretisierung der Dilatation aufgegeben. Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung, die flexiblere Diskretisierungen erlaubt. Um eine feinere Auflösung in der Diskretisierung der Skala zu erhalten, werden bei der dyadischen Wavelet-Transformation gerne die Skalen zu mehreren Untergruppen berechnet, z. B. werden neben  $2^j$  auch die Skalen zu  $(2 + \sqrt{2})^j$  berechnet. Man nennt diese Verfeinerung dann *Subbänder*. Dieses Vorgehen erlaubt aber keine einfache Rekonstruktion.

Mit integrierten Wavelets kann die geometrische Partition der Skala nun analog verfeinert werden. Im Gegensatz zur dyadischen Transformation gibt es weiterhin eine einfache Rekonstruktion, da erneut ein fester Frame entsteht.

**Korollar 3.53** *Die Dilatationen  $\mathbb{R}_+^*$  seien geometrisch diskretisiert für ein  $\lambda > 1$ . Sei  $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$ ,  $n > 0$ . Weiter sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein bandbeschränktes Wavelet. Sei  $(\Psi^{j,l})_{j,l}$  das zugehörige integrierte Wavelet. Wir können  $\Psi$  zerlegen in die Summe*

$$\Psi^{0,l} = \Psi_{c_0}^{0,l} + \dots + \Psi_{c_n}^{0,l}.$$

Dabei ist  $\Psi_{c_i}^{j,l}$  definiert durch

$$|\widehat{\Psi_{c_i}^{j,l}}(\omega)|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{\lambda^{j+c_i+1}}^{\lambda^{j+c_i}} \int_{K_l} |\widehat{D_a R_\rho \psi}(\omega)|^2 \frac{d\rho da}{a}, \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}.$$

Dann ist

$$\{\mathcal{D}_{\lambda^j} T_b \Psi_{c_i}^{0,l}; b \in \mathbb{Z}^m, j \in \mathbb{Z}, l \in L, 1 \leq i \leq n\}$$

ein fester Frame für  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

BEWEIS Zu berechnen ist

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \sum_{b \in \mathbb{Z}} |\langle f, T_b \Psi_{c_i}^{j,l} \rangle|^2.$$

Für festes  $i$  lässt sich der Beweis analog zu Satz 3.49 führen. Die Summation über  $i$  ergibt dann wieder eine Partition der Eins im Fourier-Raum.  $\square$

**Bemerkung 3.54 (Frames aus orientierten Wavelets)** In Abschnitt 3.2.2 haben wir eine Variation zur Konstruktion orientierter Wavelets  $\Psi_i^j$  beschrieben, die in Polarkoordinaten separabel sind und bezüglich Rotation auf einer beliebigen Partition der Eins im Fourier-Raum beruhen. Diese Partition sichert, dass die Sätze 3.45, 3.46 und 3.49 auch für diese orientierten Filter gültig sind.  $\square$

## 3.7 Lokale Regularitätsanalyse

Die Wavelet-Transformation ist der Fourier-Transformation überlegen, da aus ihr lokale Information über die analysierte Funktion ablesbar ist. Eine herausragende Eigenschaft der kontinuierlichen Wavelet-Transformation ist dabei die punktweise Charakterisierung der Regularität einer Funktion durch ihre Wavelet-Koeffizienten. Dieser Zusammenhang wurde intensiv von Ph. Tchamichan und M. Holschneider [HT89, Hol95] untersucht und besonders durch S. Mallat und S. Zhong [MZ92] der praktischen Nutzung zugänglich gemacht.

Eine für die Signalanalyse eingesetzte Diskretisierung sollte diese Charakterisierung erhalten. Für die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation wurde diese Frage bisher nicht untersucht.

Ich zeige, dass sich der Zusammenhang zwischen der Lipschitz-Regularität einer Funktion und dem Abklingverhalten ihrer kontinuierlichen Wavelet-Koeffizienten auf Morlet-integrierte Wavelet-Koeffizienten übertragen lässt. Da für diese Betrachtungen nur die Dilatation eine wesentliche Rolle spielt, werden die Resultate für die in Abschnitt 1.3 eingeführte eindimensionale Gruppe „ $ax + b$ “ formuliert. Die Verallgemeinerung auf den höherdimensionalen Fall und sowie Lipschitz-Regularität höherer Ordnung entspricht genau dem in meiner Diplomarbeit [Hei98] für die kontinuierliche Transformation ausgeführten Vorgehen.

Der Schluss von der Regularität der Funktion auf das Abklingen der Morlet-integrierten Wavelet-Koeffizienten lässt sich leicht übertragen. Dazu vergleichen wir in Abschnitt 3.7.1 das Abklingverhalten Morlet-integrierter Wavelet-Koeffizienten mit dem kontinuierlicher Wavelet-Koeffizienten. Aufwendiger ist dagegen die Umkehrung, die in Abschnitt 3.7.2 behandelt wird. Diese erlaubt in ihrer schärfsten Form, aus dem Abklingverhalten der (diskreten) Morlet-integrierten Wavelet-Koeffizienten auf die punktweise Lipschitzregularität der Funktion zu schließen.

**Definition 3.55** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Weiter sei  $0 < \alpha < 1$ . Wir sagen  $f$  ist in  $x_0$  **punktweise Lipschitz mit Exponent  $\alpha$** ,  $f \in \text{Lip}^\alpha(x_0)$ , falls  $h_0 > 0$  und  $C > 0$  existieren, so dass für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| < h_0$  gilt

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq C|h|^\alpha.$$

Wir sagen  $f$  ist auf  $O \subset \mathbb{R}$ ,  $O$  offen, **gleichmäßig Lipschitz mit Exponent**  $\alpha$ ,  $f \in \text{Lip}^\alpha(O)$ , falls  $h_0 > 0$  und  $C > 0$  existieren, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $h \in O$  mit  $|h| < h_0$  und  $x + h \in O$  gilt

$$|f(x + h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha.$$

Aus gleichmäßig Lipschitz  $\alpha$  folgt punktweise Lipschitz  $\alpha$ . Gleichmäßige Lipschitzregularität ist stärker, da die Konstante  $C$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gleichmäßig halten muss. Aus  $\beta < \alpha$  folgt  $\text{Lip}^\alpha \subset \text{Lip}^\beta$ . Ist  $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$ , dann ist  $f$  stetig. Diese und weitere Aussagen über Lipschitz-Regularität habe ich in [Hei98] ausführlich betrachtet. Der Zusammenhang zur Abklingordnung der Wavelet-Koeffizienten wurde dort im allgemeineren Kontext der Abschätzung durch eine submultiplikative Funktion betrachtet. Der grundlegende Zusammenhang für gleichmäßige Regularität lautet:

**Satz 3.56** [Hei98, Satz 4.19] Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $O$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  und  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $\forall O' \subset O$  mit  $\text{dist}(O', O^c) > 0$  ist  $f$  gleichmäßig Lipschitz  $\alpha$  auf  $O'$

(ii)  $\forall O' \subset O$  mit  $\text{dist}(O', O^c) > 0$  gibt es  $C > 0$  und  $a_0 > 0$ , so dass:

$$|WT_\psi f(g)| \leq Ca^\alpha \quad \forall g = (b, \varphi, a) \in \mathbb{H}^m, \text{ mit } 0 < a \leq a_0, b \in O'$$

Dabei ist  $\psi \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}^m)$  stetig differenzierbares Wavelet mit kompaktem Träger und  $n + \lfloor m/2 \rfloor$  verschwindenden Momenten.

Für punktweise Regularität gibt es keine Äquivalenz. Es gelten die folgenden beiden Aussagen.

**Lemma 3.57** [Hei98, Lemma 4.28] Sei  $f \in \text{Lip}^\alpha(x_0) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$ , für ein  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  und einen Lipschitz-Exponenten  $\alpha > 0$ . Weiter sei  $f$  stetig. Dann gilt für die Wavelet-Transformierte:  $\exists C > 0$ ,  $\exists b_0 > 0$ ,  $\exists a_0 > 0$  mit

$$|WT_\psi f(x_0 + b, \varphi, a)| \leq C(a^\alpha + \|b\|^\alpha), \quad \forall (b, \varphi, a) \in \mathbb{H}^m, \text{ mit } 0 < a < a_0, \|b\| < b_0$$

Dabei muss das Wavelet  $\psi$  kompakten Träger besitzen und  $n + 1$  verschwindende Momente haben, wobei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n < \alpha \leq n + 1$ .

**Lemma 3.58** [Hei98, Lemma 4.32] Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Sei  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Es gelte für ein  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ :

(i) Es existiert ein  $\varepsilon > 0$  und  $C > 0$ , so dass die Wavelet-Koeffizienten gleichmäßig in  $b$  und  $\varphi$

$$|WT_\psi f(b, \varphi, a)| \leq Ca^\varepsilon \quad \forall (b, \varphi, a) \in \mathbb{H}^m \text{ mit } 0 < a < 1$$

erfüllen.

(ii) Es existieren  $b_0 > 0$ ,  $a_0 > 0$  und  $C > 0$ , so dass

$$|WT_\psi f(x_0 + b, \varphi, a)| \leq C \left( a^\alpha + \frac{\|b\|^\alpha}{\ln \|b\|} \right)$$

für alle  $(b, \varphi, a) \in \mathbb{H}^m$  mit  $0 < a < a_0$  und  $\|b\| < b_0$ .

Dann folgt  $f \in \text{Lip}^\alpha(x_0)$ .

Dabei muss das Wavelet  $\psi$  aus  $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}^m)$  erfüllen,  $n+1$  verschwindende Momente besitzen und kompakten Träger haben.

Wir übertragen diese Aussagen nun auf Morlet-integrierte Wavelets.

Sei im folgenden  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  ein Morlet-zulässiges Wavelet und  $\{\Psi^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  die zu einer streng monoton fallenden Folge  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $a_j > 0$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$  gehörende Familie Morlet-integrierter Wavelets.

### 3.7.1 Abklingverhalten der Wavelet-Koeffizienten

Morlet-integrierte Wavelet-Koeffizienten sind nach Lemma 3.35 gewichtete gemittelte kontinuierliche Wavelet-Koeffizienten. Diese Beobachtung ist die Grundlage für den Zusammenhang zum Abklingverhalten kontinuierlicher Wavelet-Koeffizienten. Es bleibt nur noch der Zusammenhang zwischen einer stetigen Funktion  $F$  und der Folge der Integrale  $\int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a} da$  zu zeigen. Dazu ein elementares Ergebnis aus der Analysis:

**Proposition 3.59** Sei  $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gelte für ein  $a_0 > 0$ , ein  $\alpha > 0$  und eine Konstante  $C > 0$

$$|F(a)| \leq Ca^\alpha, \quad \forall a < a_0. \quad (3.26)$$

Dann gilt für alle  $j > j_0$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a} da \right| \leq Ca_j^\alpha. \quad (3.27)$$

BEWEIS Sei  $j_0$  so, dass  $a_{j_0} < a_0$ . Für alle  $j > j_0$  gilt mit elementarer Integralabschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a} da \right| &\leq \frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \left( \frac{a_j - a_{j+1}}{a_{j+1}} \sup_{a \in [a_j, a_{j+1}]} |F(a)| \right) \\ &\leq C \sup_{a \in [a_j, a_{j+1}]} a^\alpha \leq Ca_j^\alpha. \end{aligned}$$

□

Wavelet-Koeffizienten sind stetig. Die Konstante  $C$  in (3.26) und (3.27) ist dieselbe. Damit erhalten wir aus Proposition 3.59 und 3.56 sofort

**Lemma 3.60** Sei  $\alpha > 0$  fest. Sei  $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Dann gibt es ein  $C > 0$  und ein  $j_0 \in \mathbb{Z}$  mit

$$\frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} |\langle f, T_b \Psi^j \rangle| \leq C a_j^\alpha \quad \forall j < j_0, b \in \mathbb{R}.$$

Völlig analog lässt sich die punktweise Regularität aus Lemma 3.57 auf Morlet-integrierte Wavelets übertragen.

### 3.7.2 Regularität der Funktion

Für die Umkehrung von Proposition 3.59 benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen, die den Informationsverlust kompensieren, der durch Mittelung über kontinuierlichen Wavelet-Koeffizienten entsteht.

**Proposition 3.61** Sei  $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und im Betrag für  $a \rightarrow 0$  monoton gegen 0 fallend. Es gelte für alle  $j > j_0$  und ein  $\alpha > 0$  und eine Konstante  $C > 0$ , dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a} da \right| \leq C a_j^\alpha.$$

Dann folgt  $|F(a_{j+1})| \leq C a_j^\alpha \frac{a_j}{a_{j+1}}$ . Gilt zusätzlich  $a_j/a_{j+1} \leq K$  für alle  $j > j_0$ , so folgt für ein  $a_0 > 0$  und ein  $C' > 0$ , dass

$$|F(a)| \leq C' a^\alpha \quad \forall a < a_0.$$

BEWEIS Die Monotonie von  $f$  erlaubt die Integralabschätzung von unten:

$$\begin{aligned} |F(a_{j+1})| &= \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j} |F(a_{j+1})| \frac{a_j}{a_j - a_{j+1}} \\ &\leq \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a_j} da \right| \frac{a_j}{a_j - a_{j+1}} \leq \left| \int_{a_{j+1}}^{a_j} \frac{F(a)}{a} da \right| \frac{a_j}{a_j - a_{j+1}} \\ &\leq C a_j^\alpha \frac{a_j}{a_{j+1}}. \end{aligned}$$

Mit der zusätzlichen Abschätzung  $a_j/a_{j+1} \leq K$  folgt unmittelbar

$$|F(a_{j+1})| \leq C K a_j^\alpha \leq C K^{1+\alpha} a_{j+1}^\alpha. \quad (3.28)$$

Sei  $a_0 > 0$  so gewählt, dass  $a_0 < a_{j_0}$ . Dann gilt für alle  $0 < a < a_0$ : Sei  $j$  so, dass  $a_j \geq a > a_{j+1}$ . Es sei  $\varepsilon_a > 0$  definiert durch  $a(1 + \varepsilon_a) = a_j$ . Dann folgt  $1 + \varepsilon_a < \frac{a}{a_{j+1}}(1 + \varepsilon_a) = \frac{a_j}{a_{j+1}} \leq K$  unabhängig von  $a$ . Dann existieren für monotonen  $F$  mit (3.28) Konstanten  $C'', C'$  mit:

$$\begin{aligned} |F(a)| &\leq |F(a_j)| \leq C'' a_j^\alpha = C'' [a(1 + \varepsilon_a)]^\alpha = C'' (1 + \varepsilon_a)^\alpha a^\alpha \\ &\leq C' a^\alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

□



### Bemerkungen 3.62

- (a) Verzichtet man auf die Monotonie von  $F$ , so würde die Aussage  $\inf_{[a_j, a_{j+1}]} |F(a)| \leq C a_j^\alpha$  lauten. Damit ließe sich die erste Abschätzung in (3.29) nicht zeigen.
- (b) Bei geometrischer Wahl der Skalen ist  $\frac{a_j}{a_{j+1}} = \text{const}$ . Die Bedingung, dass die relative Bandbreite beschränkt sein muss, ist eine Abschwächung. Sie ist analog zur Littlewood-Paley Theorie [EHJ96, Kapitel 3] und wird auch als *Hadamard lacunary condition* bezeichnet.

Mit elementaren Mitteln kann eine Umkehrung also nur für in  $a \rightarrow 0$  monoton fallende kontinuierliche Wavelet-Koeffizienten erreicht werden. Deshalb beweisen wir nun einen stärkeren Zusammenhang für die Umkehrung. Zuerst zur gleichmäßigen Lipschitzregularität:

**Satz 3.63** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  Morlet-zulässiges Wavelet welches  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$  erfüllt und kompakten Träger besitzt. Die Partition der Skala sei gegeben durch  $a_j := 2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Weiter sei  $0 < \alpha < 1$ . Gelten für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Abschätzungen

$$|WT_\psi^M(b, j)| \leq C 2^{-j\alpha}, \quad (3.30)$$

gleichmäßig in  $b \in \mathbb{R}$ , sowie

$$\left| \left( \frac{d}{dx} WT_\psi^M \right) (x_0 + b, j) \right| \leq C (2^{-j\alpha} 2^j), \quad (3.31)$$

für alle  $b \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  und eine Konstante  $C > 0$ .

Dann folgt  $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{R})$ .

**BEWEIS** Der Beweis nutzt Ideen von S. Jaffard, der in [Jaf89] einen ähnlichen Zusammenhang für orthonormale Wavelet-Basen zeigt.

Sei  $h \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |h| < 1$ . Wähle  $j_0$  so, dass  $2^{-j_0} \leq |h| < 2 \cdot 2^{-j_0}$ . Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$  die, unter den gegebenen Voraussetzungen an das Wavelet punktweise, Rekonstruktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j > j_0} WT_\psi^M(x, j) + \sum_{j \leq j_0} WT_\psi^M(x, j) \\ &=: f_1 + f_\infty. \end{aligned}$$

Wir schätzen die punktweise Lipschitz-Regularität in  $x = x_0$  für die beiden Terme einzeln ab.

1) Der Term  $f_1$  wird mit Bedingung (3.30) an die Morlet-integrierten Wavelet-Koeffizienten abgeschätzt.

$$\begin{aligned} |f_1(x+h) - f_1(x)| &\leq \sum_{j > j_0} |WT_\psi^M(j, x+h)| + |WT_\psi^M(j, x)| \\ &\leq \sum_{j \geq j_0} C 2^{-j\alpha} \leq C 2^{-(j_0+1)\alpha} \leq C |h|^\alpha. \end{aligned}$$

2) Zu  $f_\infty$ : Mit Hilfe des Mittelwertsatzes gilt:

$$\begin{aligned} |f_\infty(x+h) - f_\infty(x)| &\leq \sum_{j \leq j_0} |WT_\psi^M(x+h, j)| + |WT_\psi^M(x, j)| \\ &\leq \sum_{j \leq j_0} |h| \left| \left( \frac{d}{dx} WT_\psi^M \right) (\xi_j, j) \right|, \end{aligned}$$

wobei  $\xi_j \in [x, x+h]$ . Aufgrund Bedingung (3.31) an die Morlet-integrierten Wavelet-Koeffizienten und der Wahl von  $j_0$  abhängig von  $h$  folgt mit Hilfe der geometrischen Partialsumme

$$\begin{aligned} |f_\infty(x+h) - f_\infty(x)| &\leq \sum_{j \leq j_0} |h| C 2^{j(1-\alpha)} \leq C |h| 2^{(j_0+1)(1-\alpha)} \\ &\leq C |h| 2^{(j_0+1)} 2^{-(j_0+1)\alpha} \leq C |h| \frac{1}{|h|} |h|^\alpha = C |h|^\alpha. \end{aligned}$$

Dabei wurde für die letzte Abschätzung die spezielle Wahl von  $j_0$  genutzt.

Da alle Terme durch die Ordnung  $|h|^\alpha$  abgeschätzt sind, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.64** Forderung (3.31) taucht in dem klassischen Resultat nicht auf. Sie ist ein Tribut an die Gestalt der Morlet-integrierten Transformation. Im Beweis für den klassischen Fall ist der Term  $\frac{d}{dx} WT_\psi(b, a) \psi(x)$  abzuschätzen. Dies lässt sich bereits mit (3.30) und einer Abschätzung der Form  $\|\psi'\|_\infty < \infty$  erledigen, da die Ableitung nur das Wavelet  $\psi$  betrifft, nicht den Wavelet-Koeffizienten. Für die Morlet-integrierte Transformation lautet dieselbe Stelle jedoch  $\frac{d}{dx} WT_\psi^M(x, a)$ . Es ist also der Koeffizient selbst abzuleiten. Dieses Problem verhindert auch, den Satz für höhere Regularitätsordnungen  $\alpha > 1$  zu formulieren.  $\square$

Nun folgt die Verschärfung des Resultats auf punktweise Lipschitzregularität.

**Satz 3.65** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $f \in \text{Lip}^\varepsilon(\mathbb{R})$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  Morlet-zulässiges Wavelet welches  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$  erfüllt und kompakten Träger besitzt. Die Partition der Skala sei gegeben durch  $a_j := 2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Weiter sei  $0 < \alpha < 1$ . Gelten für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Abschätzungen

$$|WT_\psi^M(x_0 + b, j)| \leq C \left( 2^{-j\alpha} + \frac{|b|^\alpha}{\ln |b|} \right), \quad (3.32)$$

sowie

$$\left| \left( \frac{d}{dx} WT_\psi^M \right) (x_0 + b, j) \right| \leq C (2^{-j\alpha} 2^j), \quad (3.33)$$

für alle  $b \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  und eine Konstante  $C > 0$ .

Dann folgt  $f \in \text{Lip}^\alpha(x_0)$ .

BEWEIS Sei  $h \in \mathbb{R}$  mit  $0 < |h| < 1$ . Wähle  $j_0$  so, dass  $2^{-j_0} \leq |h| < 2 \cdot 2^{-j_0}$ . Weiter sei ohne Einschränkung  $\varepsilon < \alpha$  und  $j_1 := j_0 \alpha / \varepsilon$ . Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$  die, unter den gegebenen Voraussetzungen an das Wavelet punktweise, Rekonstruktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{k_\psi} \int_0^{2^{-j_1}} WT_\psi(x, a) \frac{da}{a} + \sum_{j=j_0+1}^{j_1} WT_\psi^M(x, j) + \sum_{j \leq j_0} WT_\psi^M(x, j) \\ &=: f_0 + f_1 + f_\infty. \end{aligned}$$

Wir schätzen die punktweise Lipschitz-Regularität in  $x = x_0$  für die drei Terme einzeln ab.

1) Für  $f_0$  nutzen wir die geforderte gleichmäßige Lipschitz-Regularität  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} |f_0(x+h) - f_0(x)| &\leq \frac{1}{k_\psi} \int_0^{2^{-j_1}} |WT_\psi(x+h, a) - WT_\psi(x, a)| \frac{da}{a} \\ &\leq C \int_0^{2^{-j_1}} a^\varepsilon \frac{da}{a} \leq C' \int_0^{|h|^{\alpha/\varepsilon}} a^\varepsilon \frac{da}{a} \\ &\leq C'' |h|^\alpha. \end{aligned}$$

2) Der Term  $f_1$  wird mit Bedingung (3.32) an die Morlet-integrierten Wavelet-Koeffizienten abgeschätzt:

$$\begin{aligned} |f_1(x+h) - f_1(x)| &\leq \sum_{j=j_0}^{j_1} |WT_\psi^M(j, x+h)| + |WT_\psi^M(j, x)| \\ &\leq \sum_{j=j_0}^{j_1} C (2^{-j\alpha} + |h|^\alpha \ln |h|) \\ &=: f_{1a} + f_{1b}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f_{1a}$  gehört zu dem Bereich, auf dem die Abschätzung durch  $2^{j\alpha}$  dominiert.  $f_{1b}$  gehört zu dem Bereich, auf dem die Abschätzung durch  $\frac{|h|^\alpha}{\ln |h|}$  dominiert. Diese Terme werden separat abgeschätzt.

Für  $f_{1a}$  folgt aufgrund der Wahl von  $j_0$ :

$$f_{1a} \leq C \sum_{j=j_0}^{j_1} 2^{-j\alpha} \leq C \sum_{j \geq j_0} 2^{-j\alpha} \leq C 2^{-(j_0+1)\alpha} \leq C |h|^\alpha.$$

Für  $f_{1b}$  schätzen wir die Zahl der Terme in der Summe ab. Es gilt  $j_1 - j_0 = j_1(1 - \alpha/\varepsilon) \leq C \ln |h|$  aufgrund der Wahl von  $j_1$ . Damit folgt

$$f_{1b} \leq C \ln |h| \left( \frac{|h|^\alpha}{\ln |h|} \right) = C |h|^\alpha.$$

3) Der Term  $f_\infty$  wird analog zu Satz 3.63 abgeschätzt.

Da alle Terme durch die Ordnung  $|h|^\alpha$  abgeschätzt sind, folgt die Behauptung.  $\square$

Statt der dyadischen Diskretisierung reicht erneut eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  mit  $k < \frac{a_j}{a_{j+1}} < K$  für feste Konstanten  $k, K > 0$  und alle  $j \in \mathbb{Z}$  aus.

Die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation besitzt also die für die Signalanalyse wichtige Eigenschaft der kontinuierlichen Transformation, die lokale Regularität von Funktion zu charakterisieren.

In Kapitel 7 kommen wir auf den Begriff der Lipschitz-Regularität zurück und untersuchen, welchen Nutzen er für die Unterscheidung zwischen Mikroverkalkungen und Artefakten in Mammographien bringt.

# Kapitel 4

## Verallgemeinerung der integrierten Wavelet-Transformation

Die Diskretisierung durch integrierte bzw. Morlet-integrierte Wavelets wird in diesem Kapitel auf den allgemeinen Fall von Wavelet-Transformationen über semidirekte Produkte  $\mathbb{R}^m \rtimes H$ , wie sie in Kapitel 1 eingeführt wurden, übertragen. Die in diesem Kapitel gewonnenen Erkenntnisse sind neu und runden die Analyse der Eigenschaften integrierter Wavelets mathematisch ab. Sie haben für die folgende Anwendung auf digitale Mammographien keine Bedeutung.

Schwerpunkt ist die Konstruktion von Frames aus integrierten Wavelets, wie sie für die Euklidische Gruppe mit Dilatation bereits in Abschnitt 3.6 entwickelt wurde. Für allgemeine Gruppen gibt es den gewohnten Begriff der Skala nicht. Ich habe statt dessen ein abstraktes Analogon eingeführt. Dies ermöglicht, die Definition integrierter Wavelets auf eine größere Klasse von Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten zu übertragen. Ich zeige, dass integrierte Wavelets auch in diesem allgemeineren Kontext auf feste Familien von Faltungsoperatoren führen und weiter feste Frames und Wavelet-Frames erzeugen. Diese Eigenschaft ist wesentlich für die Existenz effizienter Algorithmen, da in diesem Fall die aufwendige Berechnung des dualen Frames entfällt. Besonders interessant ist, dass dieses Resultat unabhängig von der Wahl der Diskretisierung der Dilatationsgruppe ist. Damit bieten integrierte Wavelets hohe Flexibilität. So kann die Diskretisierung der Dilatationsgruppe dynamisch an die Erfordernisse der Bildanalyse angepasst werden. Dies ist mit bisher bekannten, durch Abtasten gewonnenen Frames nicht möglich. Schließlich habe ich den Zusammenhang zur klassischen Konstruktion von Wavelet-Frames durch Abtasten hergestellt.

Die Diskretisierung mit integrierten Wavelets kann auch als Konstruktion von Wavelets für feste Wavelet-Frames verstanden werden. Bei dieser Betrachtung stellt sich die Frage, wie reichhaltig diese Konstruktion ist. In Abschnitt 4.2 wird gezeigt, dass die Konstruktion integrierter und Morlet-integrierter Wavelets als Faltung bezüglich der Dilatationsgruppe  $H$  aufgefasst werden kann. Insbesondere kann ich in Abschnitt 4.3 zeigen, dass eine große Klasse fester Wavelet-Frames durch integrierte Wavelets erzeugt wird.

## 4.1 Frames aus integrierten Wavelets

### 4.1.1 Verallgemeinerte Skalen

Ziel dieses Abschnitts ist, die Konstruktion integrierter und Morlet-integrierter Wavelets auf Wavelet-Transformationen über semidirekte Produkte zu verallgemeinern. Im allgemeinen Fall ist der Skalenparameter durch eine geeignete Konstruktion zu ersetzen. Dies funktioniert technisch überraschend einfach, da die Gruppenstruktur hier keine Rolle spielt.

Sei also  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ , wobei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Untergruppe ist.  $V \subset \widehat{\mathbb{R}^m}$  sei offener  $H$ -Orbit und  $\mathcal{U}_g = T_b \pi_h$  eine quadratintegrierbare Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H}_V \subset L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Da wir eine allgemeine Dilatationsgruppe  $H$  verwenden, müssen wir einen Ersatz für den Skalen-Parameter finden. Dieser Ersatz basiert auf einer Partition der Dilatationsgruppe bezüglich messbarer Mengen:

**Definition 4.1** Sei  $J$  eine diskrete Indexmenge. Eine Familie  $(H_j)_{j \in J}$  messbarer Teilmengen von  $H$  heißt **Detail-Zerlegung**, falls folgende Eigenschaften gelten:

- (i)  $\mu_H(H_j) < \infty$ ,  $\forall j \in J$ ,
- (ii)  $\mu_H(H \setminus \bigcup_{j \in J} H_j) = 0$ ,
- (iii)  $\mu_H(H_i \cap H_j) = 0$  für alle  $i \neq j$  in  $J$ .

Bei der bisher betrachteten Euklidischen Gruppe mit Dilatation hatten wir  $\mathbb{R}_+^*$  in Intervalle zu einer Folge  $(a_j)_{j \in J}$  diskretisiert. Dort würden die Mengen also  $H_j := [a_{j+1}, a_j]$  lauten.

Als Skala  $j_0$  kann nun die Menge  $\bigcup_{j \leq j_0} H_j$  aufgefasst werden. Skalen sollten in einem geeigneten Sinn aufsteigen und den Raum nicht willkürlich ausschöpfen. Um so eine Ordnung zu erzwingen, fehlt uns die Skalierungsgleichung wie sie bei der Multiskalenanalyse auftritt. Wir werden den Begriff der Skala in diesem Kapitel nicht verwenden.

**Definition 4.2** Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet und  $(H_j)_{j \in J}$  eine Detail-Zerlegung von  $H$ . Das **diskrete Detail**  $D_j(f) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  lautet

$$D^j(x) := \frac{1}{c_\psi} \int_{H_j} d(f)_{(h)}(x) d\mu_H(h), \quad j \in J, \quad (4.1)$$

wobei  $d(f)_h \in \mathcal{H}_V$  das **Detail** von  $f$  in  $h$  ist,

$$d(f)_h := \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, \mathcal{U}_g \psi \rangle \mathcal{U}_g \psi db, \quad g = (b, h) \in G.$$

Das **integrierte Wavelet**  $\Psi^j \in \mathcal{H}_V$  ist über seine Fourier-Transformierte definiert durch

$$\left| \widehat{\Psi^j}(\omega) \right|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{H_j} \left| \widehat{\psi}(\omega h) \right|^2 d\mu_H(h), \quad \forall \omega \in V, j \in J. \quad (4.2)$$

Erneut ist das integrierte Wavelet durch die Definition nicht eindeutig festgelegt. Für die Rekonstruktion ist die Phase des integrierten Wavelets unbedeutend. Um jedoch einen Zusammenhang zwischen Wavelet  $\psi$  und integriertem Wavelet  $\Psi^j$  herzustellen, gehen wir analog zu Abschnitt 3.2.1 vor.

**Definition 4.3** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet. Sei  $h_j \in H_j$  fest gewählt. Die Phase des integrierten Wavelets  $\Psi^j$  wird durch

$$\arg\left(\widehat{\Psi^j}(\omega)\right) := \arg\left(\widehat{\psi}(\omega h_j)\right), \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}.$$

festgelegt.

Diese punktweise Definition ist nur für im Fourier-Raum stetige Wavelets möglich, weshalb  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$  gefordert wird. Die Wahl der  $h_j$  in  $H_j$  ist willkürlich. Sie führt analog zu Satz 3.16 dazu, dass der  $L^2$ -Fehler zwischen  $\Psi^j$  und  $\pi_{h_j}\psi$  für  $h = h_j$  minimiert wird. Analog zu Proposition 3.51 gilt:

**Proposition 4.4** Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  ein Wavelet. Dann ist das integrierte Wavelet  $\Psi^j \in \mathcal{H}_V$  ebenfalls zulässig.

BEWEIS Der Träger der Fourier-Transformierten  $\widehat{\Psi^j}$  des integrierten Wavelets ist i. a. größer als der von  $\widehat{\psi}$ . Da aber über die Operation von  $H$  integriert wird, bleibt der Träger im  $H$ -Orbit  $V$ . Damit folgt  $\Psi^j \in \mathcal{H}_V$ .

In Formel (4.2) wird nur über eine Menge endlichen Maßes  $H_j$  integriert. Das erlaubt Integralvertauschung. Daraus und mit der Linksinvarianz des Haar-Maßes  $d\mu_H$  folgt

$$\begin{aligned} \int_H |\widehat{\Psi^j}(\omega h)|^2 d\mu_H(h) &\leq \int_H \int_{H_j} |\psi(\omega h' h)|^2 d\mu_H(h') d\mu_H(h) \\ &\leq \int_{H_j} c_\psi d\mu_H(h') \leq \mu(H_j) c_\psi < \infty. \end{aligned}$$

□

Offensichtlich erhält man aus der Definition des integrierten Wavelets und der Zulässigkeitsbedingung aus Lemma 1.10 wieder eine Partition der Eins und somit für alle  $f \in \mathcal{H}_V$  die zu Formel (3.8) analoge Rekonstruktion

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^m} \langle f, T_b \Psi^j \rangle T_b \Psi^j db$$

in der  $L^2$ -Norm.

Falls  $J = \mathbb{Z}$ , ist die Indexmenge ein Ersatz für den Skalen-Parameter. In diesem Fall ist die Skala  $s(f)_{j_0}$  Summe aller Detail bis zu einem  $j_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$s(f)_{j_0} = \int_{\bigcup_{j < j_0} H_j} d(f)_{(h)} d\mu_H(h). \quad (4.3)$$

Analog können auch Morlet-integrierte Wavelets für beliebige Dilatationsgruppen  $H$  definiert werden:

**Definition 4.5** Das Morlet-integrierte Wavelet  $\Psi^j \in \mathcal{H}_V$  ist über seine Fourier-Transformierte definiert durch

$$\widehat{\Psi^j}(\omega) := \frac{1}{k_\psi} \int_{H_j} \hat{\psi}(\omega h) d\mu_H(h), \quad j \in J, \quad \forall \omega \in V.$$

Wir können die Detail-Zerlegung so allgemein definieren, da die Gruppenstruktur hier keine Rolle spielt. Es gibt aber Partitionen, Fundamentalbereich genannt, welche die Gruppenstruktur respektieren. Wir benötigen den Begriff für die verallgemeinerte Formulierung der Frame-Konstruktion.

**Definition 4.6** Sei  $A$  eine lokal kompakte Gruppe mit Haar-Maß  $\mu$ . Sei  $\tilde{A}$  eine kokompakte diskrete Untergruppe. Eine Borel-Teilmenge  $F$  von  $A$  heißt **Fundamentalbereich**, falls

- (i)  $\mu(A \setminus \bigcup_{a \in \tilde{A}} Fa) = 0$  und
- (ii)  $\mu(Fa_i \cap Fa_j) = 0$  für alle  $a_i \neq a_j$  in  $\tilde{A}$ .

#### 4.1.2 Verallgemeinerte Frame-Konstruktion

Wir verallgemeinern die Konstruktion fester Frames aus integrierten Wavelets, wie in Abschnitt 3.6 für die Euklidische Gruppe mit Dilatation gezeigt, für Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten. Analog zu Satz 3.45 gilt:

**Satz 4.7** Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  ein Wavelet. Weiter sei  $(\Psi^j)_{j \in J}$  integriertes Wavelet zur Detail-Zerlegung  $(H_j)_{j \in J}$ . Dann gilt

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\langle f, T_x \Psi^j \rangle\|^2 = \|f\|^2,$$

wobei die Norm auf der linken Seite über  $x \in \mathbb{R}^m$  zu nehmen ist. Eine Rekonstruktion in der  $L^2$ -Norm erhält man durch

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\langle f, T_\bullet \Psi^j \rangle * \Psi^j). \quad (4.4)$$

Die Operation von  $\mathbb{R}^m$  durch Translationen ist offensichtlich notwendiger Bestandteil von  $G$ , da darauf die Beweiskonstruktion von Satz 3.49 mit der trigonometrischen Basis im Fourier-Raum beruht.

Im Fall des Frames aus Satz 3.46 übernimmt die Funktion die Kompaktheit, die Operation von  $H$  kann beliebig aussehen. Analog gilt das folgende

**Lemma 4.8** Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  ein Wavelet,  $(\Psi^j)_{j \in J}$  das zugehörige integrierte Wavelet. Dann ist die Menge  $\{T_b \Psi^j, b \in \mathbb{Z}^m, j \in J\}$  ein fester Frame für  $\mathcal{H}_{V \cap [-\pi, \pi]^m}$



BEWEIS Für  $f \in \mathcal{H}_{V \cap [-\pi, \pi]^m}$  gilt  $\text{supp}(\hat{f}) \subset V \cap [-\pi, \pi]$ . Es folgt

$$\langle f, T_b \Psi^j \rangle = f * \widehat{\Psi^j}(b) = \int_V \hat{f}(\omega) \widehat{\Psi^j}(\omega) e^{ib\omega} d\omega = \left\langle \hat{f} \widehat{\Psi^j}, E_b \right\rangle_{L^2(V)}.$$

Der Beweis schließt analog zu Satz 3.46.  $\square$

Für beliebiges  $f$  war das Problem die nichtkompakte Operation von  $H$ . Diese muss analog zu oben abgespalten werden. Wir formulieren eine Verallgemeinerung von Satz 3.49.

**Satz 4.9** Sei  $H = A \times K$  ein direktes Produkt. Die duale Operation von  $K$  auf  $\widehat{\mathbb{R}^m}$  sei kompakt und  $(K_j)_{j \in J}$  sei eine Detail-Zerlegung für  $K$ . Weiter sei  $\tilde{A} < A$  eine kokompakte diskrete Untergruppe und  $F$  Fundamentalbereich für  $A$ . Definiere  $H_{a,j} := Fa \times K_j, j \in J, a \in \tilde{A}$ .

Sei  $(\Psi^j)_{j \in J}$  integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V$  mit  $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset [-\pi, \pi]^m \cap V$ . Dann ist

$$\{\pi_{\tilde{a} \times 1} T_b \Psi^{0,j}; b \in \mathbb{Z}^m, \tilde{a} \in \tilde{A}, j \in J\}$$

ein fester Frame für  $\mathcal{H}_V$ .

BEWEIS Hier steht  $\Psi^{\tilde{a},j}$  für Integration über  $F\tilde{a} \times K_j$  in Formel (4.2). Wir benötigen die Struktur des Fundamentalbereiches, damit die Operation von  $\tilde{A}$  auf  $H_{a,j}$  wohldefiniert ist. Dies ist analog zu Proposition 3.48 gegeben.

Der Beweis schließt analog zu Satz 3.49.  $\square$

Wir können immer  $K = \{1\}$  wählen. In diesem Fall benötigen wir einen Fundamentalbereich für ganz  $H$ . Die Motivation für das direkte Produkt im Satz ergibt sich aus der für den Beweis unwesentlichen kompakten Operation. So erhalten wir für nichttriviales  $K$  zusätzliche Freiheit bei der Diskretisierung.

Die Diskretisierung lässt sich analog zu Korollar 3.53 weiter verfeinern. Es gilt

**Korollar 4.10** Seien die Voraussetzungen von Satz 4.9 erfüllt. Sei weiter  $F = \bigcup_{0 \leq i \leq n} F_i$  die disjunkte Vereinigung von messbaren Mengen  $F_i, 0 \leq i \leq n, n > 0$ .

Definiere  $H_{a,j,i} := F_i a \times K_j, j \in J, a \in \tilde{A}$ .

Sei  $\Psi_{c_i}^{a,j}$  definiert durch

$$\left| \widehat{\Psi_{c_i}^{a,j}}(\omega) \right|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{H_{a,j,i}} \left| \hat{\psi}(\omega h) \right|^2 d\mu_H(h), \quad j \in J. \quad (4.5)$$

Dann gilt:

$$\{\pi_{\tilde{a} \times 1} T_b \Psi_{c_i}^{0,j}; b \in \mathbb{Z}^m, \tilde{a} \in \tilde{A}, j \in J, 0 \leq i \leq n\}$$

ist ein fester Frame für  $\mathcal{H}_V$ .

BEWEIS Es gilt für das integrierte Wavelet  $|\widehat{\Psi^{a,j}}|^2 = \sum_{i=1}^n |\widehat{\Psi_{c_i}^{a,j}}|^2$ . Weiter ist die Partition so gewählt, dass  $\pi_{\tilde{a} \times 1} \widehat{\Psi_{c_i}^{0,j}} = \widehat{\Psi_{c_i}^{\tilde{a},j}}$ .  $\square$

Wir geben abschließend Beispiele für feste Frames zu Wavelet-Transformationen zu verschiedenen Gruppen an. Diese Gruppen wurden von H. Führ [Füh97] in Hinsicht auf Existenz quadratintegrierbarer Darstellungen und zulässige Funktionen untersucht.

**Beispiel 4.11** Betrachte die Gruppe  $H := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ . Das Haar-Maß lautet  $d\mu_H = \frac{da_1 da_2}{a_1 a_2}$ . Ein offener Orbit ist  $V := \{(x, y); x, y > 0\} \subset \widehat{\mathbb{R}^2}$ . Die Zulässigkeitsbedingung für  $\psi \in \mathcal{H}_V$  lautet (vgl. [Füh97, 3.2.1])

$$0 < \int_{\widehat{\mathbb{R}^2}} \frac{|\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2}{|\omega_1 \omega_2|} d\omega < \infty.$$

Betrachte die Untergruppe  $\tilde{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^j & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \right\}$  mit  $\lambda, \mu > 1$ . Dann ist ein Fundamentalbereich gegeben durch  $F := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, 1 \leq a_1 \leq \lambda, 1 \leq a_2 \leq \mu \right\}$ . Nehmen wir an, wir interessieren uns besonders für horizontale Strukturen. Dann kann  $F$  weiter verfeinert werden. Sei  $1 = c_1 < c_2 < \dots < c_n = \lambda$ .

Setze  $F_i := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; c_i \leq a_1 \leq c_{i+1}, 1 \leq a_2 \leq \mu \right\}, 1 \leq i < n$ .

Sei nun  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein bandbeschränktes Wavelet und das integrierte Wavelet gegeben durch  $|\widehat{\Psi}^{(0,0),i}(\omega)|^2 := \int_{F_i} |\widehat{U_{a_1 \times a_2} \psi}(\omega)|^2 \frac{da_1 da_2}{a_1 a_2}$ . Die dilatierten Wavelets lauten dann

$$\widehat{\Psi}^{(j,k),i}(\omega) = (\lambda^j \mu^k)^{-1/2} \widehat{\Psi}^{(0,0),i}(\lambda^j \omega_x, \mu^k \omega_y).$$

Nach Korollar 4.10 ist die Menge  $\{D_{\lambda^j \times 1} D_{1 \times \mu^k} T_b \Psi^{(0,0),i}; b \in \mathbb{Z}^m, j, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < n\}$  ein fester Frame für  $\mathcal{H}_V$ .  $\square$

**Beispiel 4.12** Betrachte die Gruppe  $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \cdot s \\ 0 & a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R} \right\}$ . Das Haar-Maß ist  $d\mu_H = ds \frac{da}{a}$ . Ein offener Orbit ist  $V := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \subset \widehat{\mathbb{R}^2}$ . Die Zulässigkeitsbedingung für  $\psi \in \mathcal{H}_V$  lautet (vgl. [Füh97, Satz 3.2.3])

$$0 < \int_{\widehat{\mathbb{R}^2}} \frac{|\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2}{\omega_1^2} d\omega < \infty.$$

Betrachte die Untergruppe  $\tilde{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 2^j & 2^j \cdot k \\ 0 & 2^j \end{pmatrix}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Dann ist ein Fundamentalbereich gegeben durch  $F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \cdot s \\ 0 & a \end{pmatrix}, 1/2 \leq a \leq 1, 0 \leq s \leq 1 \right\}$ .

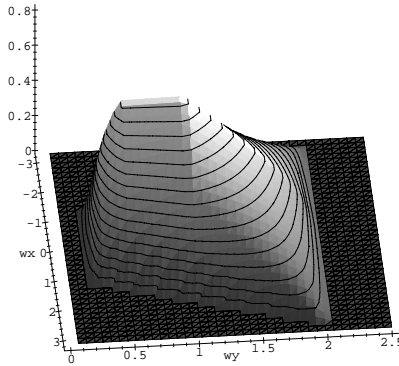
Nach Satz 4.9 ist für ein bandbeschränktes Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V$  die Menge  $\{U_h T_b \Psi^0; b \in \mathbb{Z}^m, h \in \tilde{H}\}$  ein fester Frame für  $\mathcal{H}_V$  zu dem integrierten Wavelet

$$|\widehat{\Psi}^0(\omega)|^2 := \int_{1/2}^1 \int_0^1 |\widehat{U_{a \times s} \psi}(\omega)|^2 ds \frac{da}{a}.$$

Sei zum Beispiel das Wavelet  $\psi$  im Fourier-Raum definiert als die charakteristische Funktion der Menge  $\{(\omega_x, \omega_y) \in \widehat{\mathbb{R}}^2, 0.5 < \omega_x < 1, |\omega_y| < \omega_x\}$ . Dann lautet das integrierte Wavelet

$$\left| \widehat{\Psi}^0(\omega) \right|^2 = \max \left( 0, 1 - \frac{|\omega_x|}{\omega_y + 1} \right) \max \left( 0, \ln(\min(1, 2\omega_y)) - \ln(\max(0.5, \omega_y)) \right), \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^2.$$

Abbildung 4.1 stellt dieses Wavelet dar. Es fällt auf, dass das Wavelet im Fourier-Raum stetig ist, obwohl es aus einer charakteristischen Funktion erzeugt ist. Diese und weitere Eigenschaften integrierter Wavelets werden in den folgenden Abschnitten 4.2 und 4.3 untersucht.  $\square$



**Abbildung 4.1: Integriertes Wavelet zur Scherungsgruppe.** Das integrierte Wavelet  $\widehat{\Psi}^0$  aus Beispiel 4.12.

### 4.1.3 Nicht bandbeschränkte Wavelets

Was passiert, wenn wir die Voraussetzung bandbeschränkt in Satz 3.49 oder Satz 4.9 fallen lassen? Besteht eine Chance, dann trotzdem noch automatisch feste Frames zu erzeugen? Wie die folgenden Argumente zeigen, ist das nicht der Fall. Zur Konstruktion eines affinen Frames sind die Operation der Translation  $\mathbb{R}^m$  sowie der Dilatationsgruppe  $H$  zu beachten. Die Konstruktion integrierter Wavelets durch Integration über Dilatationen sichert, dass die Operation der Dilatation keine Probleme bereiten kann. Translationen sind davon nicht betroffen. Diese haben wir fest im Griff durch die Voraussetzung bandbeschränkt. Lässt man diese Voraussetzung nun fallen, wird eine andere Forderung notwendig, welche sichert, dass bezüglich Translationen ein Frame entsteht. Wir erhalten für Frames aus integrierten Wavelets die folgende vereinfachte Framebedingung.

**Satz 4.13** *Sei  $\psi \in \mathcal{H}_V$  ein Wavelet und  $(\Psi^j)_j$  ein zugehörendes integriertes Wavelet. Die Dilatationsgruppe  $H$  sei bezüglich einer diskreten kokompakten Untergruppe  $\tilde{A} < H$*

diskretisiert.  $F$  sei ein zugehöriger Fundamentalbereich. Die Diskretisierung von  $H$  ist dann gegeben durch  $H_a := Fa, a \in \tilde{A}$ .

Bezeichne  $\beta(s) := \sup_{\omega \in V} \sum_{a \in \tilde{A}} \left| \widehat{\Psi^0}(\omega a) \right| \left| \widehat{\Psi^0}(\omega a + 2\pi s) \right|, s \in \mathbb{Z}^m$ .

Es sei  $R := \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} [\beta(k)\beta(-k)]^{1/2} < 1$ .

Dann ist

$$\{\pi_a T_b \Psi^0; b \in \mathbb{Z}^m, a \in \tilde{A}\}$$

ein Frame für  $\mathcal{H}_V$  mit Schranken  $1 + R, 1 - R$ .

BEWEIS Der Beweis verallgemeinert eine Abschätzung für Frame-Schranken affiner Wavelet-Frames von I. Daubechies [Dau92, 3.3.2]. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \pi_a T_b \Psi^0 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega) \widehat{\Psi^0}(\omega) e^{ib\omega} d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k) e^{ib\omega} d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left\langle \pi_a^* \hat{f}(\bullet + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\bullet + 2\pi k), E_b \right\rangle_{L^2([-\pi, \pi]^m)} \\ &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \pi_a^* \hat{f}(\bullet + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\bullet + 2\pi k), E_b \right\rangle_{L^2([-\pi, \pi]^m)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aus Formel (4.6) folgt nun für die Frame-Bedingung mit der Plancherel-Identität für Fourier-Reihen:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{b \in \mathbb{Z}^m} |\langle f, \pi_a T_b \Psi^0 \rangle|^2 &= \sum_{a \in \tilde{A}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \pi_a^* \hat{f}(\bullet + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\bullet + 2\pi k) \right\|_{L^2([-\pi, \pi]^m)}^2 = \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \int_{[-\pi, \pi]^m} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k) \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k), \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k) \right\rangle_{L^2([-\pi, \pi]^m)} \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega) \widehat{\Psi^0}(\omega) \overline{\pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k)} d\omega \\ &= \sum_{a \in \tilde{A}} \int_{\mathbb{R}^m} |\pi_a^* \hat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\Psi^0}(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^m} \pi_a^* \hat{f}(\omega) \widehat{\Psi^0}(\omega) \overline{\pi_a^* \hat{f}(\omega + 2\pi k) \widehat{\Psi^0}(\omega + 2\pi k)} d\omega \\ &= \|f\|^2 + Rest \end{aligned}$$

Für die vierte Umformung wird das Skalarprodukt ausgeschrieben und eine Summation über  $k$  mit dem Integral zusammengefasst. Die letzte Vereinfachung für den ersten Summanden ist dem integrierten Wavelet zu verdanken, analog zum Beweis von Satz 3.49. Der Rest lässt sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen durch

$$\begin{aligned}
|Rest| &\leq \sum_{a \in \tilde{A}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \left\| |\hat{f}(\omega)| |\widehat{\Psi}^0(\omega a)|^{1/2} |\widehat{\Psi}^0(\omega a + 2\pi k)|^{1/2} \right\|_{L^2(\widehat{\mathbb{R}}^m)} \\
&\quad \cdot \left\| |\hat{f}(\omega + 2\pi k)| |\widehat{\Psi}^0(\omega)|^{1/2} |\widehat{\Psi}^0(\omega a + 2\pi k)|^{1/2} \right\|_{L^2(\widehat{\mathbb{R}}^m)} \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \left( \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 \sum_{a \in \tilde{A}} |\widehat{\Psi}^0(\omega a)| |\widehat{\Psi}^0(\omega a + 2\pi k)| d\omega \right)^{1/2} \\
&\quad \cdot \left( \int_{\widehat{\mathbb{R}}^m} |\hat{f}(\omega)|^2 \sum_{a \in \tilde{A}} |\widehat{\Psi}^0(\omega a - 2\pi k)| |\widehat{\Psi}^0(\omega a)| d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} [\beta(k)\beta(-k)]^{1/2} \\
&\leq \|f\|^2 R,
\end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen  $\beta$  und  $R$  aus dem Satz.

Daraus folgen die behaupteten Frame-Schranken.  $\square$

Bei Daubechies lauten die Frame-Schranken  $c - R$  und  $C + R$  mit von dem Wavelet abhängigen Konstanten  $c$  und  $C$ . Diese Konstanten  $c$  und  $C$  beschreiben genau, wie „fest“ der Frame bezüglich der Dilatationsgruppe ist. Aufgrund obiger Resultate über feste Familien von Faltungsoperatoren sind diese Konstanten für integrierte Wavelets gleich 1.

**Bemerkung 4.14** Hat die Fourier-Transformierte des Wavelets kompakten Träger in  $[-\pi, \pi]^m$  oder einem anderen Fundamentalbereich von  $\mathbb{R}^m/\pi\mathbb{Z}^m$ , so folgt aus der Definition von  $\beta$  sofort  $R = 0$  und damit die Aussage von Satz 3.49.  $\square$

**Bemerkung 4.15** Die Forderung an das Wavelet  $\psi$  ist nicht besonders stark. Eine hinreichende Bedingung für endliches  $R$  ist bei der affinen Wavelet-Transformation laut [Dau92], wenn gilt  $|\hat{\psi}(\omega)| \leq C\|\omega\|^\alpha(1 + |\omega|^2)^{-\gamma/2}$ , mit  $\alpha > 0$  und  $\gamma > \alpha + 1$ . Diese Bedingung überträgt sich auf das integrierte Wavelet.  $\square$

## 4.2 Injektivität der Konstruktion integrierter Wavelets

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Frage, ob das Wavelet  $\psi$  aus dem (Morlet-)integrierten Wavelet  $(\Psi^j)_j$  rekonstruiert werden kann. Es zeigt sich, dass es genügt, für ein  $\Psi^{j_0}$

mit festem  $j_0 \in J$  zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Abbildung  $\psi \mapsto \Psi^{j_0}$  injektiv ist. Verwandt ist die Frage, welche Wavelets  $\psi$  auf das gleiche integrierte Wavelet  $(\Psi^j)_j$  abgebildet werden, also eine Äquivalenzklasse bilden.

Der Ansatz zur Lösung ist die Beobachtung, dass die Konstruktion integrierter Wavelets als Faltung über der Dilatationsgruppe  $H$  interpretiert werden kann. Diese Beobachtung ist auch für den folgenden Abschnitt zur Charakterisierung fester Familien wichtig.

Sei  $G = \mathbb{R}^m \rtimes H$ , wobei  $H < GL(m, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Untergruppe ist. In diesem und dem folgenden Abschnitt sei die Dilatationsgruppe  $H$  abelsch.  $V \subset \widehat{\mathbb{R}^m}$  sei offener  $H$ -Orbit und  $\mathcal{U}_g = T_b \pi_h$  eine quadratintegrierbare Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{H}_V \subset L^2(\mathbb{R}^m)$ . Sei  $(H_j)_j$  eine gegebene Partition von  $H$ . Das integrierte Wavelet  $(\Psi^j)_j$  zu einem Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V$  ist nach (4.2) definiert durch

$$|\widehat{\Psi^j}(\omega)|^2 := \frac{1}{c_\psi} \int_{H_j} |\hat{\psi}(\omega h)|^2 d\mu_H(h), \quad \forall \omega \in V, j \in J,$$

wobei die Definition für nichtnegatives, reelles  $\widehat{\Psi^j}$  eindeutig ist.

Das Morlet-integrierte Wavelet ist nach Definition 4.5 definiert als

$$\widehat{\Psi^j}(\omega) := \frac{1}{k_\psi} \int_{H_j} \hat{\psi}(\omega h) d\mu_H(h), \quad \forall \omega \in V, j \in J.$$

Wir können beide Konstruktionen parallel untersuchen, indem wir das Problem abstrahieren. Dazu betrachten wir für festes  $j_0 \in J$  auf  $\mathcal{H}_V \cap L^1(\widehat{\mathbb{R}^m})$  den Integraloperator  $I : L^1(\widehat{\mathbb{R}^m}) \rightarrow L^1(\widehat{\mathbb{R}^m})$ ,  $\varphi \mapsto I(\varphi)$  mit

$$I(\varphi)(\omega) := \Phi(\omega) := \int_{H_{j_0}} \varphi(\omega h) d\mu_H(h) \quad \forall \omega \in V. \quad (4.7)$$

Die Frage lautet nun: Wann ist der Integraloperator  $I$  injektiv, bzw. wann kann aus der Funktion  $\Phi$  die Funktion  $\varphi$  rekonstruiert werden?

Dazu fassen wir das Integral als Faltung bezüglich der Gruppe  $H$  auf. Dieser Ansatz erlaubt, den durch (4.7) definierten Integraloperator als Multiplikation zu schreiben. Damit diese Integration als Faltung interpretiert werden kann, identifizieren wir  $V$  mit  $H$  über den  $H$ -Orbit  $V = H\gamma_0$  wobei  $\gamma_0 \in V$  fest ist. Damit ist die Abbildung  $q : L^1(V) \rightarrow L^1(H)$  punktweise definiert durch

$$q(\varphi) := \dot{\varphi} := \varphi \circ p_{\gamma_0}$$

wohldefiniert. Die Funktion  $p_\gamma : H \rightarrow V$ ,  $h \mapsto \gamma h$  stammt aus Lemma 1.9. Die Identifikation hängt von der Wahl von  $\gamma_0$  ab. Es liegt im allgemeinen keine Bijektion zwischen  $H$  und  $V$  vor, so zum Beispiel für  $H := \mathbb{R}_+^* \times SO(m)$  mit  $m > 2$ .  $\varphi$  ist konstant auf den Stabilisatorgruppen  $H_\gamma$ ,  $\gamma \in V$ . Das Bild einer Funktion aus  $L^1(V)$  unter  $q$  liegt in  $L^1(H)$ , da nach Satz 1.8 für quadratintegrierbare Darstellungen die Stabilisatorgruppen kompakt sind.

Die Zulässigkeitsbedingung an ein Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V$  kann nach Lemma 1.10 als  $|\hat{\psi}|^2 \circ p \in L^1(H)$  geschrieben werden. Es gilt also für ein Wavelet  $\psi \in \mathcal{H}_V$ :

$$\dot{\varphi}(h) = |\hat{\psi}(\gamma_0 h)|^2, \quad \forall h \in H.$$

Analog gilt für Morlet-integrierte Wavelets nach Abschnitt 1.6 die Zulässigkeitsbedingung  $\hat{\psi} \circ p \in L^1(H)$ .

Damit kann Formel (4.7) als Faltung von  $L^1$ -Funktionen bezüglich der Gruppe  $H$  geschrieben werden als  $\dot{I} : L^1(H) \rightarrow L^1(H)$ ,  $\dot{\varphi} \mapsto \dot{\Phi} := \dot{I}(\dot{\varphi})$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(h') &= q(\Phi)(h') = \int_{H_j} \dot{\varphi}(h'h) d\mu_H(h) = \int_H \dot{\varphi}(h'h) \dot{\chi}_{H_j^{-1}}(h^{-1}) d\mu_H(h) \\ &= \int_H \dot{\varphi}(h'h^{-1}) \dot{\chi}_{H_j^{-1}}(h) \Delta_H(h) d\mu_H(h) \\ &= \left( \dot{\varphi} *_H \Delta_H \dot{\chi}_{H_j^{-1}} \right) (h'), \end{aligned} \quad (4.8)$$

für alle  $h' \in H$ . Dabei ist  $\Delta_H$  die Modularfunktion von  $H$ . Da wir  $H$  in diesem Abschnitt abelsch annehmen, gilt  $\Delta_H = 1$  und die Modularfunktion wird in der folgenden Diskussion ignoriert.

Damit  $\dot{\Phi} \in L^1(H)$  wieder als Funktion auf  $V$  aufgefasst werden kann, ist zu zeigen, dass  $\dot{\Phi}$  auf den Stabilisatorgruppen  $H_\gamma$ ,  $\gamma \in V$ , konstant ist. Dies folgt direkt aus (4.7). Damit ist die Abbildung  $q^{-1}$ , definiert durch  $q^{-1}(\dot{\Phi})(h\gamma_0) := \Phi(h\gamma_0) := \dot{\Phi}(h)$ ,  $h \in H$ , wohldefiniert. Wir können nun einfache Eigenschaften (Morlet-)integrierter Wavelets zeigen.

**Lemma 4.16** *Sei  $(\Psi^j)_j$  integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Bezeichne  $\dot{\Phi} := |\widehat{\Psi^j}|^2 \circ p$  für festes  $j \in J$ .*

- (i) *Es gilt  $|\widehat{\Psi^j}|$  ist stetig. Weiter gilt  $\dot{\Phi} \in L^1(H)$ .*
- (ii) *Sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$ . Für Einparametergruppen  $H$  ist  $|\widehat{\Psi^j}|^2$  auf  $V$  differenzierbar mit  $\frac{d}{dx} |\widehat{\Psi^j}|^2 \circ p \in L^1(H)$ . Allerdings gilt nicht notwendig stetige Differenzierbarkeit.*

**BEWEIS** (i) Es gilt  $\dot{\Phi}$  ist nach (4.8) ein Faltungsprodukt bzgl. der Gruppe  $H$  und damit stetig. Damit ist auch  $|\widehat{\Psi^j}|$  stetig.

Dasselbe gilt mit  $\Phi := \widehat{\Psi^j} \circ p$  für ein Morlet-integriertes Wavelet  $(\Psi^j)_j$ .

Die Integrierbarkeit  $|\widehat{\Psi^j}|^2 \circ p \in L^1(H)$  folgt aus Proposition 4.4.

(ii) Für integrierbares  $\psi$  ist die Funktion  $\varphi$  stetig. Sei  $\varphi^S$  eine Stammfunktion von  $\varphi$  und  $H = \mathbb{R}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \Phi(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \int_{a_{j+1}}^{a_j} \varphi(\omega + a) da = \frac{d}{d\omega} (\varphi^S(\omega + a_{j+1}) - \varphi^S(\omega + a_j)) \\ &= \varphi(\omega + a_{j+1}) - \varphi(\omega + a_j). \end{aligned}$$

Damit folgt die Differenzierbarkeit für jede Einparametergruppe  $H$ , insbesondere die Dilatation  $H = \mathbb{R}_+^*$  und Rotation  $SO(2)$ .  $\square$

**Bemerkung 4.17** Die Stetigkeit der Fourier-Transformierten eines integrierten Wavelets sieht man in Abbildung 4.1 zu Beispiel 4.12. Das zugrunde liegende Wavelet ist im Fourier-Raum eine charakteristische Funktion.

Der Motivation von Korollar 3.52 folgend, kann Abbildung  $I$  aus (4.7) auch zur Konstruktion von Wavelets benutzt werden. Da integrierte Wavelets insbesondere zulässig sind, kann man das Verfahren iterieren. Die Differenzierbarkeitsordnung nimmt mit der Zahl der Faltungen zu. So lassen sich im Fourier-Raum beliebig glatte, gut lokalisierte Wavelets konstruieren.  $\square$

Betrachtet man die Fourier-Transformierte bezüglich  $H$ , so folgt aus (4.8) für  $\varphi \in L^1(H)$ :

$$\mathcal{F}^H \dot{\Phi}(\hat{h}) = \mathcal{F}^H \dot{\varphi}(\hat{h}) \circ \mathcal{F}^H \left( \Delta_H \dot{\chi}_{H_j^{-1}} \right) (\hat{h}), \quad \hat{h} \in \hat{H}. \quad (4.9)$$

Für die im folgenden betrachteten abelschen Gruppen  $H = \mathbb{R}_+^*$  und  $H = SO(2)$  ist die Komposition als Multiplikation komplexer Zahlen erklärt.

Für nicht kompakte Gruppen  $H$  kann nicht erwartet werden, dass es einen beschränkten inversen Faltungsoperator zu  $\dot{\chi}_{H_j^{-1}}$  gibt. Jedoch kann die Frage nach Injektivität der Abbildung untersucht werden.

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge und Bezeichnungen ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{H}_V & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(V) & \longrightarrow & L^1(V) & \xrightarrow{q} & L^1(H) & \xrightarrow{\mathcal{F}^H} & A(\hat{H}) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \psi & \longmapsto & \hat{\psi} & \mapsto & \varphi := |\hat{\psi}|^2 & \mapsto & \dot{\varphi} & \longmapsto & \mathcal{F}^H \dot{\varphi} \end{array}$$

Wir untersuchen die Frage nach Injektivität nun abhängig von der zugrunde liegenden Dilatationsgruppe  $H$ .

## 4.2.1 Reelle Dilatation

Sei  $H$  die Euklidische Gruppe mit Dilatation und das Wavelet  $\psi$  in Polarkoordinaten separabel. Wir betrachten den Anteil zur Dilatation, das Wavelet sei dabei isotrop. Die Fourier-Transformation über  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ , auch als **Mellin-Transformation** bekannt, kann durch die Fourier-Transformation über  $(\mathbb{R}, +)$  ausgedrückt werden. Wir nutzen dazu die Gruppenisomorphie zwischen  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +)$ , die durch die Exponentialabbildung gegeben ist. Es gilt  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \circ \exp = \exp \circ \mathcal{F}$ .



**Proposition 4.18** Für die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*}$  von  $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{d\omega}{\omega})$  gilt

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} f(\dot{\omega}) = \mathcal{F}(f \circ \exp)(\ln(\dot{\omega})), \quad \forall \dot{\omega} \in \widehat{\mathbb{R}_+^*}.$$

Damit können wir die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion  $\dot{\chi}_{[a_j, a_{j+1}]}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  bezüglich  $H$  bestimmen.

**Proposition 4.19** Es gilt:

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a,b]}(\dot{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} \ln(b/a) e^{-i \ln(\dot{\omega}) \ln(ab)/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\ln(\dot{\omega}) \ln(b/a)}{2\pi}\right), \quad \dot{\omega} \in \widehat{\mathbb{R}_+^*}. \quad (4.10)$$

Diese Funktion hat einfache, diskrete Nullstellen bei  $\dot{\omega} = e^{\frac{2\pi k}{\ln b/a}}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

BEWEIS Auf  $\mathbb{R}$  gilt  $\widehat{\chi}_{[-\pi, \pi]} = (2\pi)^{1/2} \operatorname{sinc}(\omega)$ , wobei  $\operatorname{sinc}(\omega) := \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$  die Sinus-Kardinalis Funktion ist. Daraus folgt für  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ :

$$\widehat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} (b-a) e^{-i\omega(a+b)/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega(b-a)}{2\pi}\right), \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}. \quad (4.11)$$

Die Funktion  $\dot{\chi}_{[a,b]}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  wird mit der Funktion  $\chi_{[\ln a, \ln b]}$  auf  $\mathbb{R}$  identifiziert. Deren Fourier-Transformierte über  $\mathbb{R}$  lautet nach (4.11)

$$\mathcal{F}\chi_{[\ln a, \ln b]}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \ln(b/a) e^{-i\omega \ln(ab)/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \ln(b/a)}{2\pi}\right), \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}.$$

Substitution  $\dot{\omega} = e^\omega$  ergibt (4.10). Die Nullstellen lassen sich über die Nullstellen des Sinus ablesen.  $\square$

Offensichtlich gibt es keine beschränkte Inverse für den Faltungsoperator  $\dot{I}$  auf  $L^1(\mathbb{R}_+^*)$ . Für stetige Funktionen  $\dot{\varphi}$  ist der Operator  $\dot{I}$  aber invertierbar, indem im Fourier-Raum punktweise mit dem Inversen von  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_j, a_{j+1}]}$  multipliziert und an den Nullstellen stetig fortgesetzt wird:

**Lemma 4.20** Sei eine Diskretisierung der Skala  $(H_j)_j$  durch eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  gegeben und  $(\Psi^j)_j$  integriertes Wavelet zu einem isotropen Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

(i) Für festes  $j \in J$  ist die Abbildung  $\psi \mapsto \Psi^j$  injektiv.

(ii) Seien  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Die Mellin-Transformierten von  $|\widehat{\Psi^j}|^2$  und  $|\widehat{\Psi^k}|^2$  haben genau dann dieselben Nullstellen, falls die Intervalle durch Dilatation auseinander hervorgehen, d. h. ein  $c > 0$  existiert, so dass  $c[a_j, a_{j+1}] = [a_k, a_{k+1}]$ .

Insbesondere werden zwei Wavelets  $\psi_1$  und  $\psi_2$  genau dann auf die gleiche Familie integrierter Wavelets  $(\Psi^j)_j$  abgebildet, wenn ein  $j'$  existiert, so dass  $a_j = a_{j+j'}$  für alle  $j \in J$  und weiter  $D_{a_j} \psi_1 = \psi_2$  für ein  $j \in J$ .

BEWEIS (i) Da  $\psi$  ein Wavelet ist, gilt  $|\hat{\psi}|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$  als Funktion auf  $\mathbb{R}_+^*$ . Damit ist die Mellin-Transformierte von  $\dot{\varphi} := |\hat{\psi}|^2 \circ p$  stetig. Bezeichne  $\dot{\Phi} := \dot{I}(\dot{\varphi})$ . Es gilt dann punktweise

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}(\dot{\omega}) = \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\varphi}(\dot{\omega}) \cdot \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\dot{\omega}), \quad \forall \dot{\omega} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Da die Nullstellen isoliert liegen, lässt sich diese Multiplikation punktweise invertieren durch

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\varphi}(\dot{\omega}) = \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}(\dot{\omega}) \cdot \left( \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\dot{\omega}) \right)^{-1}, \quad \forall \dot{\omega} \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ e^{\frac{2\pi k}{na}}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

wobei an den isolierten Nullstellen von  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}$  eindeutig stetig fortgesetzt werden kann. Insbesondere ist  $\psi \mapsto \Psi^j$  injektiv.

(ii) Dilatation geht unter Mellin-Transformation in Modulation über. Damit folgt die Aussage über die Lage der Nullstellen aus der analogen Eigenschaft für die Fourier-Transformation auf  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Das Lemma gilt analog für die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation.

## 4.2.2 Rotation

Wir untersuchen nun die Richtungsselektivität integrierter Wavelets. Dazu betrachten wir in Polarkoordinaten separable Wavelets, wie in Abschnitt 3.2.2 eingeführt. Sei also  $H = \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  und  $(K_l)_{l=0, \dots, L}$  eine Diskretisierung von  $SO(2)$  mit  $K_l := [k_l, k_{l+1}]$ . Wir identifizieren im folgenden  $L^2(SO(2))$  mit  $L^2([- \pi, \pi])$ .

Sei  $\hat{\psi}(\omega) := \mu(|\omega|)\eta(\arg(\omega))$  mit  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}^2}$ , wie in Abschnitt 3.2.2. Dann ist  $\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega) = \mu^j(|\omega|)\eta_l(\arg(\omega))$ , wobei

$$\left| \eta_l(\arg(\omega)) \right|^2 = \int_{K_l} \left| R_\rho \eta(\arg(\omega)) \right|^2 d\rho.$$

Bezeichne  $\dot{\varphi}(x) := |\eta_l(x)|^2$ ,  $x \in SO(2)$ . Sei  $\dot{I} : L^1(SO(2)) \rightarrow L^1(SO(2))$ ,

$$\dot{I}(\dot{\varphi})(x) = \dot{\Phi}(x) := \int_{K_l} R_\rho \dot{\varphi}(x) d\rho, \quad x \in SO(2).$$

Damit ist der Rotationsanteil isoliert und kann unabhängig von der Dilatation untersucht werden.

**Lemma 4.21** Sei  $0 \leq l \leq L$ .

- (i) Die Abbildung  $\dot{I}$  ist injektiv genau dann, wenn für die Länge des Bogens  $K_l \subset SO(2)$  gilt:  $K_l/2\pi$  ist irrational.
- (ii) Sei  $l$  fest. Ist  $K_l/2\pi$  rational, so ist das Urbild  $\dot{\varphi}$  von  $\dot{\Phi}_l$  unter  $\dot{I}$  nur modulo der Frequenzen  $e^{-iq\mathbb{Z}}$  bestimmt, wobei  $K_l = \frac{p}{q}2\pi$  mit teilerfremden  $p, q \in \mathbb{N}$ . D.h. der Kern der Abbildung  $\dot{I}$  ist der Raum

$$\{f \in L^1([-\pi, \pi]); \hat{f}(k) = 0 \text{ für alle } k \bmod q \neq 0\}.$$

Insbesondere gilt: Ist die Diskretisierung der Rotation durch die zyklische Untergruppe  $\mathbb{Z}_L$  gegeben, d.h.  $k_l = 2\pi l/L$ ,  $0 \leq l \leq L$ , dann ist das Urbild  $\dot{\varphi}$  von  $\dot{\Phi}_l$  unter  $\dot{I}$  nur modulo der Frequenzen  $e^{-iq\mathbb{Z}}$  bestimmt.

- (iii) Ist  $K_l/2\pi$  rational für alle  $l \in L$ , so ist das der Familie  $(\dot{\Phi}_l)_l$  zugrunde liegende  $\dot{\varphi}$  nur modulo der Menge von Frequenzen

$$F := \bigcap_{0 \leq l < L} \left\{ e^{-iq_l\mathbb{Z}}; K_l = \frac{p_l}{q_l}2\pi \text{ mit teilerfremden } p_l, q_l \in \mathbb{N} \right\} \quad (4.12)$$

bestimmt. D.h. der Kern der Abbildung  $\dot{\varphi} \mapsto (\dot{\Phi}_l)_l$  ist der Raum

$$\left\{ f \in L^1([-\pi, \pi]); (\hat{f}(q))_{q \in \mathbb{Z}} \subset F \right\}.$$

**BEWEIS** Wir betrachten wieder die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion, diesmal über  $SO(2)$ . Für  $0 \leq a < b \leq 2\pi$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\mathcal{F}^{SO(2)} \dot{\chi}_{[a,b]}(k) = (2\pi)^{-1/2} (b-a) e^{-ik(a+b)/2} \text{sinc} \left( \frac{k(b-a)}{2\pi} \right).$$

(i) und (ii): Die Nullstellen von  $\hat{\chi}_{[a,b]}$  liegen also bei  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k(b-a)/2\pi \in \mathbb{Z}$ . Es ist  $\widehat{SO(2)} = \mathbb{Z}$  diskret. D.h. die Abbildung  $I$  ist injektiv, genau dann, wenn  $\hat{\chi}_{K_l}$  keine Nullstellen besitzt, also genau dann, wenn  $K_l$  irrationale Länge hat.

(iii) Die Aussage folgt elementar als Schnitt der Kerne der Komponentenabbildungen in (ii).  $\square$

**Bemerkung 4.22** Sei  $L \in \mathbb{N}$ . Die Menge  $\{f \in L^2([-\pi, \pi]); \hat{f}(k) = 0 \text{ für alle } k \bmod L \neq 0\}$  enthält genau jene Funktionen, welche  $2\pi/L$ -periodisch sind und damit auf den Intervallen  $[2\pi l, 2\pi l + 2\pi/L]$ ,  $0 \leq l < L$ ,  $l \in \mathbb{N}$  das gleiche Maß haben. Insbesondere hat eine Funktion, deren Fourier-Transformierte nur aus Frequenzen in der Menge  $F$  aus Formel (4.12) besteht auf allen Intervallen  $K_l$  das gleiche Maß. Es geht also bei der Konstruktion des integrierten Wavelets nur jene Struktur des Wavelets verloren, welche man bei Diskretisierung auch zu verlieren erwartet.  $\square$

### 4.3 Zur Charakterisierung fester Familien integrierter Wavelets

Wir haben in Abschnitt 4.1.2 gesehen, dass integrierte Wavelets feste Familien von Faltungsoperatoren erzeugen. Können durch diese Konstruktion alle festen Wavelet-Familien erzeugt werden? Wir werden sehen, dass dies nicht der Fall ist. Unter welchen Voraussetzungen an das Wavelet gilt die Umkehrung, d. h. wann ist eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren durch ein integriertes Wavelet erzeugt? Kann die Menge der durch integrierte Wavelets erzeugten festen Familien von Faltungsoperatoren vielleicht charakterisiert werden? Für bandbeschränktes Wavelet erzeugen integrierte Wavelets feste Wavelet-Frames, wie wir in Satz 4.9 bzw. Korollar 3.52 gezeigt haben. Unter welchen Voraussetzungen an das Wavelet gilt hier die Umkehrung?

Als **Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren**  $(\Psi^j)_j$  wird, analog zum Begriff des Wavelet-Frame, eine Familie von Faltungsoperatoren bezeichnet, die als Orbit  $\pi_h \psi$ ;  $h \in A$  der Operation  $\pi_H$  einer diskreten Untergruppe  $A$  von  $H$  auf einem Wavelet  $\Psi$  erzeugt wird.

**Definition 4.23** Sei  $A$  eine diskrete kokompakte Untergruppe von  $H$  und  $F$  ein Fundamentalbereich zu  $H/A$ . Weiter sei  $H_a := Fa$ ,  $a \in A$ .

$$FF_A := \{\psi \in \mathcal{H}_V; (\pi_a \psi)_{a \in A} \text{ ist feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren}\}$$

$$IW_F := \{\Psi \in \mathcal{H}_V; (\pi_a \Psi)_{a \in A} \text{ ist integriertes Wavelet zur Diskretisierung } (H_a)_{a \in A}\}$$

In diesem Abschnitt wird wieder  $H$  abelsch angenommen.

Es gilt  $IW_F \subset FF_A$ , da nach Satz 4.7 integrierte Wavelets  $(\Psi^j)_j$  feste Wavelet-Familien von Faltungsoperatoren sind.

Zur Umkehrung: Gegeben die Bedingung für eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren  $(\Psi^a)_{a \in A}$  zur diskreten Untergruppe  $A$  von  $H$  mit einem Wavelet  $\Psi \in \mathcal{H}_V$  und  $\Psi^a := \pi_a \Psi$ ,

$$\sum_{a \in A} |\widehat{\Psi^a}(\omega)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in V,$$

folgt daraus, dass  $(\Psi^a)_{a \in A}$  ein integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi$  und einem Fundamentalbereich  $F$  von  $H/A$  ist?

Aus Lemma 4.16 folgt  $IW_F \subsetneq FF_A$ , da  $\widehat{IW_F} \subset \mathcal{C}(H)$ , aber im Fourier-Raum nicht-stetige Wavelets feste Frames erzeugen können, so z. B. jede messbare charakteristische Funktion eines Fundamentalbereiches zu  $H/A$ . Allerdings ist so ein Wavelet nicht integrierbar und aufgrund der daraus folgenden schlechten Lokalisierung nicht besonders attraktiv.

Es bleibt die Frage, wie groß die Menge  $IW_F$  ist. Die in Lemma 4.16 festgehaltenen Eigenschaften sind notwendig. Ziel dieses Abschnittes sind hinreichende Bedingungen an eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren aus  $FF_A$ , die garantieren, dass er durch

ein integriertes Wavelet erzeugt ist. Mit Formel (4.9) lässt sich die Frage umformen zu: Ist die durch

$$g(\hat{h}) := \mathcal{F}^H \dot{\Phi}(\hat{h}) \cdot \left( \mathcal{F}^H \dot{\chi}_{H_j^{-1}}(\hat{h}) \right)^{-1}, \quad \hat{h} \in \hat{H} \quad (4.13)$$

definierte Funktion  $g$  die Fourier-Transformierte eines Wavelets bezüglich  $H$ , gibt es also ein  $\varphi \in L^1(H)$  mit  $g = \mathcal{F}^H \varphi$ ? Das heißt, liegt  $g$  in  $A(\hat{H})$ , hat also eine absolut integrierbare Fourier-Transformierte? Die Frage nach einer konstruktiven Charakterisierung des Raumes  $A(G)$  zu einer lokalkompakten Gruppe  $G$  ist leider ein offenes Problem der Harmonischen Analyse. Deshalb können wir bei diesem Beweisansatz nur auf hinreichende, aber nicht unbedingt notwendige Kriterien hoffen.

Wir untersuchen wieder die Fälle  $H = \mathbb{R}_+^*$  und  $H = SO(2)$  genauer und zeigen Verallgemeinerungen auf.

### 4.3.1 Reelle Dilatation

Für eine durch die Folge  $a_j := a^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $a > 1$  gegebene Partition von  $H = \mathbb{R}_+^*$  folgt für die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion nach Proposition 4.19

$$\mathcal{F}^H \dot{\chi}_{[a^j, a^{j+1})}(\dot{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} (\ln a) e^{-i \ln(\dot{\omega})((2j+1) \ln a)/2} \operatorname{sinc} \left( \frac{\ln \dot{\omega} \ln a}{2\pi} \right).$$

Diese Funktion hat einfache, diskrete Nullstellen bei  $\dot{\omega} = e^{\frac{2\pi k}{\ln a}}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Damit die Funktion  $g$  aus (4.13) in  $A(\hat{H})$  liegt, muss sie insbesondere stetig sein. Das bedeutet, das Wavelet  $\Psi$  muss im Fourier-Raum durch die punktweise Inverse der sinc-Funktion auf  $\mathbb{R}_+^*$  teilbar sein, also an den Nullstellen der sinc-Funktion selbst Nullstellen besitzen. Dies folgt in der Tat bereits aus der Frame-Bedingung. Dieser Zusammenhang wird nun gezeigt. Dazu folgender Satz aus [BS99] über die additive Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$ .

Sei  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  und beschränkt. Weiter gelte  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t - n)| < \infty$  gleichmäßig für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann folgen  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ , absolute Konvergenz der Reihe für alle  $t \in \mathbb{R}$ , gleichmäßige Konvergenz auf beliebigen Kompakta,  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t - n)| < \infty$  und  $\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|t-n| > R} |\varphi(t - n)| = 0$ .

**Satz 4.24** [BS99] *Sei  $a > 0$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R})$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(x - an)| < \infty$  gleichmäßig für  $x \in [0, a]$ . Dann sind äquivalent:*

$$(i) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x - an) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \text{Für stetiges } f \text{ gilt } \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f \left( \frac{an\pi}{\Omega} \right) \varphi \left( \frac{\Omega x}{\pi} - an \right) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \hat{\varphi}(2\pi n/a) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} & n = 0, \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Eine solche Funktion  $\varphi$  heißt **approximierende Eins**.

Sei weiter

$$m_\alpha(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|^\alpha |\varphi(x - k)|. \quad (4.14)$$

Ist  $m_\alpha(\varphi)$  endlich für ein  $\alpha > 0$ , so hat  $\hat{\varphi}$  stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j \leq \alpha$ . Eine ausreichende Bedingung hierfür ist  $|\varphi(x)| = \mathcal{O}(|x|)^{-\alpha-\gamma}$  für  $x \rightarrow \infty$  mit  $\gamma > 1$ .

Motivation für die Autoren des Satzes ist die Approximation in Aussage (ii). Diese wird für unsere Betrachtung nicht verwendet.

**BEWEIS** Wir zeigen nur die für uns interessante Äquivalenz zwischen (i) und (iii). Die Funktion  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(x - an)|$  kann als periodische Funktion aus  $L^2([0, a])$  aufgefasst werden. Dann gilt mit der Poisson-Summationsformel (vgl. Anhang)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x - an) = (2\pi)^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\pi n/a) e^{i2\pi xn/a}$$

Aus (i) folgt für die rechte Seite, dass alle Fourier-Koeffizienten bis auf  $\hat{\varphi}(0)$  verschwinden. Umgekehrt folgt aus (iii), dass sich die Summe auf der rechten Seite auf einen Summanden reduziert, die linke Seite also konstant ist.  $\square$

Der Satz lässt sich von  $\mathbb{R}$  auf lokalkompakte abelsche Gruppen  $G$  verallgemeinern. Grundlage ist eine entsprechend allgemeine Poisson Summationsformel, wie sie bei G. B. Folland zu finden ist:

**Satz 4.25** [Fol95, Theorem 4.42] Sei  $H$  abgeschlossene Untergruppe der lokalkompakten abelschen Gruppe  $G$ . Für  $f \in L^1(G)$  definiere  $F \in L^1(G/H)$  durch  $F(xH) := \int_H f(xy)dy$ . Weiter seien  $\chi_\omega(x) = \langle x, \omega \rangle$  die Charaktere von  $G$ . Bezeichne  $H^\perp := \{\omega \in \hat{G}; \chi_\omega(x) = 1 \text{ für alle } x \in H\}$  den Annulator von  $H$ .

Dann gilt  $\hat{F} = \hat{f}|_{H^\perp}$ , wobei  $(\widehat{G/H})$  mit  $H^\perp$  identifiziert wird. Ist weiter  $\hat{f}|_{H^\perp} \in L^1(H^\perp)$ , dann gilt, mit geeignet normierten Haar-Maßen auf  $H$  und  $H^\perp$ , dass

$$\int_H f(xy)dy = \int_{H^\perp} \hat{f}(\omega) \chi_\omega(x) d\omega. \quad (4.15)$$

Die klassische Poisson-Summationsformel folgt mit  $G = \mathbb{R}$ ,  $H = \mathbb{Z}$ . In diesem Fall ist  $H^\perp = \mathbb{Z} \subset \hat{\mathbb{R}}$  und  $\chi_\omega(x) = e^{2\pi i \omega \cdot x}$ .

Es folgt:

**Satz 4.26** Seien  $G$  und  $H$  wie in Satz 4.25.  $H$  sei diskret und kokompakt.

Sei  $\varphi \in \mathcal{C}^B(G)$  und  $\sum_{h \in H} |\varphi(gh)| < \infty$  gleichmäßig für  $g \in G$ . Dann sind äquivalent:

$$(i) \sum_{h \in H} \varphi(gh) = 1, \quad \forall g \in G.$$

$$(ii) \hat{\varphi}(\hat{h}) = \begin{cases} 1 & \hat{h} = \chi_{1_G} \in \widehat{G}, \\ 0 & \hat{h} \in H^\perp \subset \widehat{G}, \hat{h} \neq \chi_{1_G}. \end{cases}$$

BEWEIS Die verallgemeinerte Poisson-Summationsformel (4.15) führt auf

$$\sum_{h \in H} \varphi(gh) = \sum_{\hat{h} \in H^\perp} \hat{\varphi}(\hat{h}) \chi_{\hat{h}}(g), \quad g \in G.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) folgt analog zu Satz 4.24 aus den Orthogonalitätsrelationen, da  $G/H$  kompakt und abelsch ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i) folgt sofort.  $\square$

Übertragen auf die Gruppe  $G := (\mathbb{R}_+^*, *)$  und Mellin-Transformation  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*}$  ergibt sich

**Korollar 4.27** Sei  $a > 1$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R}_+^*)$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(a^n x)| < \infty$  gleichmäßig für  $x \in [1, a]$ . Dann sind äquivalent:

$$(i) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(a^n x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$(ii) \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \varphi(e^{\frac{2\pi n}{\ln a}}) = \begin{cases} e^{(2\pi)^{-1/2}} & n = 0, \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

BEWEIS In Satz 4.26 wird keine explizite Normierung angegeben. Für die direkte Rechnung nutzen wir den Zusammenhang zwischen  $\mathbb{R}_+^*$  und  $\mathbb{R}$ , der durch die Exponentialfunktion gegeben ist. Sei  $\Psi = \varphi \circ \exp$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}$ . Dann lässt sich die Formel auf  $\mathbb{R}$  schreiben als  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(n \ln(a) + x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Aus Satz 4.24 folgt, dass  $\hat{\Psi}(\frac{2\pi k}{\ln a}) = 0$  für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Daraus folgt Aussage (ii) für  $\varphi$ .  $\square$

Damit sind nun die Nullstellen in  $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$  einer festen Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren bekannt.

**Satz 4.28** Sei  $a > 1$ . Sei  $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein isotropes Wavelet und  $\{\Psi^j := \mathcal{D}_{a^j} \Psi, j \in \mathbb{Z}\}$  eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren für  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

(i) Die Mellin-Transformierte von  $\dot{\Phi} := |\widehat{\Psi}^j|^2 \circ p$  hat Nullstellen an den Stellen  $\hat{h} = e^{\frac{2\pi n}{\ln a}}$ , für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $j \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Für differenzierbares  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}$  ist  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}^j(\hat{h}) \left( \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \chi_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\hat{h}) \right)^{-1}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$  stetig auf  $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$ .

BEWEIS Zu zeigen ist, dass  $\dot{\Phi} := |\widehat{\Psi}^j|^2 \circ p$  die Voraussetzungen von Korollar 4.27 erfüllt. Da  $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ , ist  $\hat{\Psi}$  und damit auch  $|\widehat{\Psi}^j|^2$  stetig und beschränkt.

(i)  $\dot{\Phi}$  ist nach Voraussetzung stetig und beschränkt auf  $\mathbb{R}_+^*$ . Aus der Frame-Bedingung folgt  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\dot{\Phi}(a^n h)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{\Phi}(a^n h) = 1, \forall h \in \mathbb{R}_+^*$ . Damit sind die Voraussetzungen von Korollar 4.27 sowie 4.27(i) erfüllt. Es folgt die Behauptung.

(ii) Die Nullstellen der sinc-Funktion auf  $\mathbb{R}$  sind einfach, also auch die Ordnung der Polstellen ihrer Inversen. Da die Exponentialfunktion ein Diffeomorphismus ist, überträgt sich dies auf die Polstellen von  $(\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\hat{h}))^{-1}$ . Weiter ist die sinc-Funktion auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar.

$\dot{\Phi}$  hat nach Proposition 4.19 Nullstellen bei den Nullstellen von  $\dot{\chi}$ . Ist  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}$  differenzierbar, so folgt mit der Regel von l'Hospital, dass an den Stellen  $\hat{h} = e^{\frac{2\pi n}{\ln a}}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \hat{h}} \frac{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}(\omega)}{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\omega)} = (\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi})'(\hat{h}).$$

Damit ist die Stetigkeit gezeigt. □

Stetigkeit ist eine notwendige Voraussetzung dafür, dass

$$g := \frac{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}(\hat{h})}{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\chi}_{[a_{j+1}^{-1}, a_j^{-1}]}(\hat{h})}$$

in  $A(\widehat{\mathbb{R}_+^*})$  liegt, welche nach letztem Satz im wesentlichen aus der Frame-Bedingung folgt. Es bleibt aber noch ein hinreichendes Kriterium dafür zu zeigen, dass  $g$  in  $A(\widehat{\mathbb{R}_+^*})$  liegt, also die Fourier-Transformierte eines Wavelets  $\varphi$  ist.

Wir betrachten zuerst eine lokale Eigenschaft. Eine Funktion  $f$  ist **lokal** in  $A(G)$  für ein lokalkompakte topologische Gruppe  $G$ , falls für alle  $g \in G$  eine offene Umgebung  $O_g$  und eine Funktion  $h_g \in A(G)$  existieren, so dass  $f = h_g$  auf  $O_g$ .

Es gilt nach [Kah70], dass eine Funktion  $f$  lokal in  $A(\mathbb{T})$  ist, genau dann, wenn sie lokal in  $A(\mathbb{R})$  ist. Dies ist hilfreich, da für  $f \in A(\mathbb{T})$  viele lokale Kriterien bekannt sind. Für kompakte abelsche Gruppen  $G$  folgt mit dem Satz von Heine-Borel und einer Partition der Eins: Ist  $f$  lokal in  $A(G)$ , dann gilt  $f \in A(G)$ . Dagegen ist die Menge der Funktionen  $A^{loc}(\mathbb{R})$ , die lokal in  $A(\mathbb{R})$  sind, echt größer als  $A(\mathbb{R})$ . Ein triviales Beispiel ist  $f \equiv 1$ . Wir zeigen, unter welchen Voraussetzungen  $g \in A^{loc}(\widehat{\mathbb{R}_+^*})$  erreicht werden kann. In einem zweiten Schritt verschärfen wir diese, um  $g \in A(\widehat{\mathbb{R}_+^*})$  zu erzwingen.

## Ein lokales Kriterium

**Proposition 4.29** (Bernstein) [Kat76] *Ist  $f \in \text{Lip}^\alpha(\mathbb{T})$  für ein  $\alpha > 1/2$ , dann folgt  $f \in A(\mathbb{T})$ .*

Es folgt also insbesondere  $f \in A^{loc}(\mathbb{R})$ , falls  $f$  differenzierbar ist.

**Satz 4.30** *Sei  $a > 0$ . Sei  $\Phi \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R})$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Phi(x - an)| < \infty$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - an) = 1$  gleichmäßig für  $x \in [0, a]$ .*

*Weiter sei  $x^2 \Phi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ .*

*Definiere*

$$g(\omega) := \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\chi}_{[0, a]}(\omega)}, \quad \omega \in \hat{\mathbb{R}}.$$



Dann gilt:  $g \in A^{loc}(\hat{\mathbb{R}})$ .

BEWEIS Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Summe folgt  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ . Sei o. E.  $a = 1$ , also

$$g(\omega) = C(\omega) \frac{\hat{\Phi}(\omega)\omega}{2 \sin(\frac{\omega}{2})}. \quad (4.16)$$

Die in  $C(\omega)$  zusammengefasste Modulation aus (4.11) ist beliebig differenzierbar und dem Betrag nach konstant 1. Wir zeigen, dass  $g$  differenzierbar ist. Mit Proposition 4.29 folgt dann die Behauptung.

Falls für  $\frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$  Differenzierbarkeit gilt, folgt das auch für  $g$ . Ist  $\hat{\Phi}$  differenzierbar, sind nur noch die Nullstellen des Sinus zu prüfen. Es gilt:

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})} = \frac{\hat{\Phi}'(\omega) \sin(\frac{\omega}{2}) - \frac{1}{2} \hat{\Phi}(\omega) \cos(\frac{\omega}{2})}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}$$

$\hat{\Phi}$  hat unter den gegebenen Voraussetzungen nach Satz 4.24 Nullstellen an den Nullstellen von  $\sin(\frac{\omega}{2})$ . Eine Taylor-Entwicklung von  $\hat{\Phi}$  in einer Nullstelle  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ergibt

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\hat{\Phi}(2\pi n + \omega)}{\sin(\frac{2\pi n + \omega}{2})} = \frac{\hat{\Phi}'(2\pi n + \omega) \left( \sin(\frac{\omega}{2}) - \omega \cos(\frac{\omega}{2}) \right) - \omega^2 \hat{\Phi}''(2\pi n + \omega) \cos(\frac{\omega}{2}) + o(\omega^3)}{\sin^2(\frac{\omega}{2})}.$$

Mit  $\omega \rightarrow 0$  geht der Wert gegen  $\hat{\Phi}''(2\pi n)$ . Die zweifache Differenzierbarkeit von  $\hat{\Phi}$  folgt nach Lemma A.1(ii) aus  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$  und  $x^2 \Phi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Daraus folgt die Existenz des Differenzenquotienten in  $2\pi n$ .  $\square$

**Korollar 4.31** Sei  $\dot{\Phi} \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R}_+^*)$  und sei  $a > 1$ .

Seien  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\dot{\Phi}(a^n x)| < \infty$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{\Phi}(a^n x) = 1$  gleichmäßig für  $x \in [1, a]$ . Weiter sei  $\ln^2(x) \dot{\Phi}(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$ . Dann gilt für

$$g(\dot{\omega}) := \frac{\mathcal{F}_{\mathbb{R}_+^*}^{\dot{\Phi}}(\dot{\omega})}{\mathcal{F}_{\dot{\chi}_{[1,a]}}^{\dot{\Phi}}(\dot{\omega})},$$

dass  $g \in A^{loc}(\hat{\mathbb{R}}_+^*)$ .

BEWEIS Der Beweis folgt, analog 4.27, über den durch die Exponentialfunktion gegebenen Zusammenhang zwischen  $\mathbb{R}_+^*$  und  $\mathbb{R}$  aus Satz 4.30.  $\square$

## Ein globales Kriterium

**Proposition 4.32** Sei  $f$  aus dem Sobolev-Raum  $H^1(\mathbb{R})$ , d. h.  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist differenzierbar und  $f' \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann folgt  $f \in A(\mathbb{R})$ .

BEWEIS Der Beweis ist von der analogen Situation auf dem Torus, vgl. [Kat76], auf  $\mathbb{R}$  übertragen. Sei  $K > 0$ . Es gilt mit zweifacher Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_1 &= \int_{-K}^K |\hat{f}(\omega)| d\omega + \int_{|\omega|>K} \left| \omega \hat{f}(\omega) \frac{1}{\omega} \right| d\omega \\ &\leq (2K)^{1/2} \left( \int_{-K}^K |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} + \|\omega \hat{f}(\omega)\|_2 \left( \int_{|\omega|>K} \left| \frac{1}{\omega} \right|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &\leq C_K \|\hat{f}\|_2 + \|\hat{f}'\|_2 C'_K = C_K \|f\|_2 + \|f'\|_2 C'_K < \infty. \end{aligned}$$

□

**Satz 4.33** Sei  $a > 0$ . Sei  $\Phi \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R})$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Phi(x - an)| < \infty$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - an) = 1$  gleichmäßig für  $x \in [0, a]$ .

Weiter sei  $x^2 \Phi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\Phi$  sei differenzierbar mit  $\Phi' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  und  $x^2 \Phi'(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Definiere

$$g(\omega) := \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\hat{\chi}_{[0,a]}(\omega)}$$

Dann gilt  $g \in A(\hat{\mathbb{R}})$ .

BEWEIS Wie oben folgt aus den Voraussetzungen  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ . Sei o. E.  $a = 1$ . Wir zeigen, dass  $g$  die Voraussetzungen der Proposition 4.32 erfüllt. Die Differenzierbarkeit von  $g$  folgt nach Satz 4.30. Es bleibt  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $g' \in L^2(\mathbb{R})$  zu zeigen. Mit  $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\Phi' \in L^1(\mathbb{R})$  folgt aus Lemma A.1

$$g(\omega) = C(\omega) \frac{\hat{\Phi}'(\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Der Faktor  $C(\omega)$  ist wie oben beliebig differenzierbar und von Betrag 1.

1) Zu zeigen:  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $D_N := \bigcup_{k \in 2\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}} [k - \varepsilon, k + \varepsilon]$  eine Umgebung der kritischen Nullstellen des Sinus. In  $\omega = 0$  gibt es in der Darstellung aus (4.16) aufgrund des Faktors  $\omega$  im Zähler keine Probleme.

Außerhalb der Nullstellenumgebung  $D_N$  gilt  $\int_{D_N^c} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \leq \|\hat{\Phi}'\|_2 \sin(\varepsilon)^{-1} < \infty$ , falls  $\hat{\Phi}' \in L^2(\mathbb{R})$ , d. h.  $\Phi' \in L^2(\mathbb{R})$ , wie vorausgesetzt.

Da  $\hat{\Phi}(2\pi n) = \hat{\Phi}'(2\pi n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , kann die Umgebung  $D_N$  der Nullstellen  $2\pi n$  mit Hilfe des Mittelwertsatzes abgeschätzt werden durch

$$|g(2\pi n + \omega)| = \left| \frac{\hat{\Phi}'(2\pi n + \omega) - \hat{\Phi}'(2\pi n)}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right| \leq \frac{|\omega| \hat{\Phi}''(\xi)}{\sin(\frac{\omega}{2})} \leq C_\varepsilon \hat{\Phi}''(\xi), \quad |\omega| < \varepsilon$$

wobei  $\xi \in [2\pi n, 2\pi n + \omega]$ .

Die resultierende Forderung  $(\hat{\Phi}')' \in L^2(\mathbb{R})$  ist nach Lemma A.1(iv) erfüllt, falls  $\Phi' \in L^1(\mathbb{R})$  und  $x\Phi'(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

2) Zu zeigen:  $g' \in L^2(\mathbb{R})$ . Der Beweis verläuft analog zu 1), nur eine Differenzierbarkeitsordnung höher. Notwendig ist dann  $(\hat{\Phi}')'' \in L^2(\mathbb{R})$ , was durch  $\Phi' \in L^1(\mathbb{R})$  und  $x^2\Phi'(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  sichergestellt ist.  $\square$

**Korollar 4.34** Sei  $\dot{\Phi} \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R}_+^*)$  und sei  $a > 1$ .

Seien  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\dot{\Phi}(a^n x)| < \infty$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{\Phi}(a^n x) = 1$  gleichmäßig für  $x \in [1, a]$ . Weiter sei  $\ln^2(x)\dot{\Phi}(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$  und  $\ln^2(x)\dot{\Phi}'(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$ .

Dann gilt für

$$g(\dot{\omega}) := \frac{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \dot{\Phi}(\dot{\omega})}{\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \chi_{[1,a]}(\dot{\omega})}, \quad \dot{\omega} \in \hat{\mathbb{R}}_+^*,$$

dass  $g \in A(\hat{\mathbb{R}}_+^*)$ . Das heißt, es gibt ein  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$  mit  $g = \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \varphi$ .

**BEWEIS** Der Beweis folgt, analog 4.27, über den durch die Exponentialfunktion gegebenen Zusammenhang zwischen  $\mathbb{R}_+^*$  und  $\mathbb{R}$  aus Satz 4.33.  $\square$

Nun kann die in diesem Abschnitt angestrebte Aussage über feste Wavelet-Familien von Faltungsoperatoren formuliert werden.

**Satz 4.35** Sei  $a > 1$ . Sei  $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein isotropes Wavelet und  $\{\Psi^j := \mathcal{D}_{a^j} \Psi, j \in \mathbb{Z}\}$  eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren für  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Es sei  $\mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*}(|\hat{\Psi}|^2 \circ p) / \mathcal{F}^{\mathbb{R}_+^*} \chi_{[1,a]}$  von positivem Typ. Weiter seien

$$\frac{\ln^3 |\omega| |\hat{\Psi}|^2(\omega)}{|\omega|} \in L^1(\mathbb{R}^m) \tag{4.17}$$

und

$$\frac{\ln^3 |\omega| \hat{\Psi}(\omega) \hat{\Psi}'(\omega)}{|\omega|} \in L^1(\mathbb{R}^m). \tag{4.18}$$

Dann gibt es ein Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , so dass  $(\Psi^j)_j$  integriertes Wavelet zu  $\psi$  und der Diskretisierung  $a_j := a^j$  von  $\mathbb{R}_+^*$  ist.

BEWEIS 1) Das in Korollar 4.34 definierte  $\varphi$  liefert eine gesuchte Funktion  $\psi$  durch  $|\hat{\psi}|^2 := q^{-1}(\varphi)$ . Es sind also die Voraussetzungen von Korollar 4.34 zu zeigen.

Sei  $j \in J$  fest. Bezeichne  $\dot{\Phi} := |\widehat{\Psi^j}|^2 \circ p$ .

Analog zu Satz 4.33 sind aufgrund der festen Wavelet-Familie die Bedingungen  $\dot{\Phi} \in \mathcal{C}^B(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $\dot{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$  und  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\dot{\Phi}(a^n x)| < \infty$  sowie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{\Phi}(a^n x) = 1$  erfüllt.

Es gilt  $\ln^2(x)\dot{\Phi}(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$  aufgrund Forderung (4.17).

Ebenso gilt  $\ln^2(x)\dot{\Phi}'(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x})$  aufgrund Forderung (4.18).

2) Für obiges  $\psi$  ist bisher nur die Zulässigkeit gezeigt. Zusätzlich muss  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  gelten. Das ist gleichbedeutend zu  $|\hat{\psi}(\omega)|^2 \circ p \in L^1(\mathbb{R})$ , also  $\omega|\hat{\psi}(\omega)|^2 \circ p \in L^1(\mathbb{R}_+^*, \frac{d\omega}{\omega})$ . Dazu ist  $g' \in A(\mathbb{R}_+^*)$  mit dem  $g$  aus obigem Korollar zu zeigen. Dies entspricht einer um eine Ordnung höheren Differenzierbarkeit von  $g$  in Satz 4.33 und führt mit analoger Rechnung auf die Bedingungen (4.17) und (4.18).  $\square$

Welche Funktionen erfüllen die Bedingungen des Satzes? Das folgende Korollar zeigt, dass dies fast alle interessanten – also im Zeitbereich lokalisierten – Wavelets umfasst.

**Korollar 4.36** *Sei  $a > 1$ . Sei  $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$  ein isotropes Wavelet und  $\{\Psi^j := \mathcal{D}_{a^j}\Psi, j \in \mathbb{Z}\}$  eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren für  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Für das Wavelet gelte*

$$\hat{\Psi}' \in L^1(\mathbb{R}^m) \tag{4.19}$$

sowie für ein  $C > 0$  und ein  $\varepsilon > 0$

$$|\hat{\Psi}(\omega)| \leq C\|\omega\|^{1/2+\varepsilon}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m} \tag{4.20}$$

für alle  $\|\omega\| < 1$ .

Dann ist  $(\Psi^j)_j$  integriertes Wavelet zu einem Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und der Diskretisierung  $a_j := a^j$  von  $\mathbb{R}_+^*$ .

Bedingung (4.19) folgt mit Lemma A.1(iv) z. B. aus  $x\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1(\mathbb{R}^m)$ .

BEWEIS Für  $\|\omega\| \geq 1$  gilt  $\frac{\ln^3(|\omega|)}{|\omega|} < \infty$  und damit  $\int_{\|\omega\| \geq 1} \frac{\ln^3(|\omega|)|\hat{\Psi}|^2(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty$ .

Für  $\|\omega\| < 1$  folgt  $\frac{\ln^3(|\omega|)|\hat{\Psi}|^2(\omega)}{|\omega|} \leq \ln^3(|\omega|)C|\omega|^{2\varepsilon} < \infty$  aus (4.20).

Damit gilt  $\int_{\|\omega\| < 1} \frac{\ln^3(|\omega|)|\hat{\Psi}|^2(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty$ . Es folgt Formel (4.17).

Aus (4.19) folgt  $\hat{\Psi}(\omega)\hat{\Psi}'(\omega) \in L^1(\mathbb{R}^m)$  und analog zu oben Formel (4.18).  $\square$

Bedingung (4.19) ist nach Lemma 4.16 notwendig, damit eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren durch integrierte Wavelets erzeugt wird. Die Frage, ob die zusätzliche Bedingung (4.20) für die Umkehrung auch notwendig ist, ist offen.

## 4.3.2 Rotation

Für Rotation ist die Situation einfacher, da  $SO(2)$  eine kompakte Gruppe ist und damit  $L^2(SO(2)) \subset L^1(SO(2))$  gilt. Die Bezeichnungen seien analog zu Abschnitt 4.2.2 gewählt.

Wir formulieren Satz 4.26 für  $G = SO(2)$  und  $H = \mathbb{Z}_L$ . Es ist  $\widehat{SO(2)} = \mathbb{Z}$ .

**Korollar 4.37** Sei  $L \in \mathbb{N}$  und  $a := 2\pi/L$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{C}(SO(2))$ . Dann sind äquivalent:

$$(i) \sum_{n=0}^{L-1} \varphi(x - an) = 1, \quad \forall x \in SO(2).$$

$$(ii) \mathcal{F}^{SO(2)}\varphi(qk) = \begin{cases} a & k = 0, \\ 0 & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \quad \text{wobei } a = 2\pi \frac{p}{q} \text{ mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd.}$$

BEWEIS Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Es gilt

$$\hat{\varphi}(qk) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-2\pi i x q k} dx = \sum_{n=0}^{L-1} \int_0^a \varphi(x - an) e^{-2\pi i (x - an) q k} dx.$$

Aus (i) und mit  $aqk = 2\pi pk$  folgt für  $k \neq 0$ , dass  $\hat{\varphi}(qk) = \int_0^{aqk} e^{-2\pi i x} dx = 0$ . Analog zeigt man die Umkehrung.  $\square$

Damit eine Funktion  $g$  mit  $g \cdot \widehat{\chi_{K_l}} = \dot{\Phi}_l$  existiert, muss  $\dot{\Phi}_l$  Nullstellen bei den Nullstellen von  $\widehat{\chi_{K_l}}$  besitzen. Ist  $(\eta_l)_l$  wie in Abschnitt 4.2.2 der Rotationsanteil einer in Polarkoordinaten separablen festen Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren, dann gilt

$$\sum_{l=1}^L |\eta_l(x)|^2 = 1, \quad \text{für alle } x \in SO(2).$$

Insbesondere ist mit obigem Korollar und  $\dot{\Phi} := |\eta_l(x)|^2$  die Forderung nach geeigneten Nullstellen erfüllt.

Aus Lemma 4.21 folgt, dass  $g$ , falls es existiert, nur Modulo der Frequenzen  $q\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  bestimmt ist. Wir setzen diese daher ohne Einschränkung auf 0. Damit ist

$$g(k) := \begin{cases} \frac{\widehat{\Phi}_l(k)}{\widehat{\chi_{K_l}(k)}} & k \notin q\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & k \in q\mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.21)$$

wohldefiniert. Das Analogon zu Satz 4.35 für  $SO(2)$  lautet nun:

**Satz 4.38** Sei  $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein Wavelet mit  $\hat{\Psi}(\omega) := \mu(|\omega|)\eta(\arg(\omega))$ ,  $\omega \in \widehat{\mathbb{R}^2}$ , wie in Abschnitt 3.2.2 definiert. Sei  $\{\Psi_{j,l} := \mathcal{D}_{a^j} R_{k^l} \Psi; j \in \mathbb{Z}, l \in L\}$  eine zugehörige feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren für  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: Ist  $\dot{\Phi}$  differenzierbar mit  $\dot{\Phi}' \in L^2(SO(2))$ , so gibt es eine Funktion  $f \in L^2(SO(2))$ , mit

$$\dot{\Phi}_l = \int_{K_l} R_\rho f d\rho.$$

BEWEIS Aus  $\dot{\Phi} \in L^2(SO(2))$  und  $\dot{\Phi}' \in L^2(SO(2))$  folgt  $k\hat{\Phi}(k) \in l^2(\mathbb{Z})$ . Damit ist auch  $g$  aus Formel (4.21) in  $l^2(\mathbb{Z})$ . Es folgt  $\hat{g} \in L^2(SO(2)) \subset L^1(SO(2))$ . Dieses  $g$  ist die gesuchte Funktion. Die Voraussetzung der festen Wavelet-Familie sichert die Lage der Nullstellen von  $\widehat{\Phi}(k)$  und damit die Wohldefiniertheit von  $g$ , wie oben beschrieben.  $\square$

### 4.3.3 Feste integrierte Wavelet Frames

Für bandbeschränkte Wavelets lassen sich die Aussagen über feste Wavelet-Familien von Faltungsoperatoren auf feste Wavelet-Frames übertragen. Für einen festen Wavelet-Frame  $\{\mathcal{D}_{a^j} R_\rho T_b \psi ; b \in \mathbb{Z}^m, j \in \mathbb{Z}, \rho \in R\}$  von  $\mathcal{H}_V$  gilt für alle  $f \in \mathcal{H}_V$ :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} \sum_{b \in \mathbb{Z}^m} |\langle f, \mathcal{D}_{a^j} R_\rho T_b \psi \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Ist  $\psi$  bandbeschränkt, so folgt:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} \sum_{b \in \mathbb{Z}^m} |\langle f, \mathcal{D}_{a^j} R_\rho T_b \psi \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} \sum_{b \in \mathbb{Z}^m} |\langle \hat{f}, \mathcal{D}_{a^{-j}} R_{-\rho} E_b \hat{\psi} \rangle|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} \sum_{b \in \mathbb{Z}^m} |\langle \mathcal{D}_{a^j} R_\rho \hat{f} \hat{\psi}, E_b \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} \|\mathcal{D}_{a^j} R_\rho \hat{f} \hat{\psi}\|^2 \\ &= \int_V |f(\omega)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} |\widehat{D_{a^j} R_\rho \psi}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wird die Dilatation  $\mathcal{D}$  bei der Substitution zur  $L^1$ -normierten Dilatation  $D$ , analog zu (3.25). Da dies für alle  $f \in \mathcal{H}_V$  gilt, folgt

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\rho \in R} |\widehat{D_{a^j} R_\rho \psi}(\omega)|^2 = 1$$

für fast alle  $\omega \in V$ . Dies ist nun aber die Bedingung für eine feste Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren, obige Sätze lassen sich darauf anwenden.

## 4.4 Ausblick

Abschließend möchte ich zwei Ansätze für Verallgemeinerungen vorstellen:

### Partition der Dilatationsgruppe

Dies betrifft zum einen die Partition  $(H_j)_j$  der Dilatationsgruppe  $H$  in Teilmengen. In Definition 4.1 wurde vorausgesetzt, dass die Mengen  $H_j$  disjunkt sind. Man kann statt dessen auch eine allgemeinere Partition der Eins in nichtnegative Funktionen  $(F_j)_j$  auf  $H$  verwenden, für die gilt

- (i)  $\int_H F_j(h) d\mu_H(h) < \infty, \quad \forall j \in J,$
- (ii)  $\sum_{j \in J} F_j(h) = 1, \quad \forall h \in H.$

Die abstrakten Aussagen über die integrierte Wavelet-Transformation lassen sich mit dieser Definition analog beweisen. Es gibt aber einen wesentlichen Nachteil für die praktische Anwendung, wie am Beispiel der Dilatation  $\mathbb{R}_+^*$  deutlich wird: So wird die Familie integrierter Wavelets  $(\Psi^j)_j$  zu einem Wavelet  $\psi$  und einer Folge  $(a_j)_j$ , wie in Beispiel 3.14 gezeigt, durch Auswerten einer Stammfunktion an den Endpunkten der Intervalle  $[a_{j+1}, a_j]$  generiert. Insbesondere lässt sich bei einer Implementation integrierter Wavelets im Computer die Diskretisierung, gegeben durch die Folge  $(a_j)_j$ , jederzeit ändern. Für eine durch obige allgemeinere Partition gegebene Familie integrierter Wavelets dagegen wäre für jedes integrierte Wavelet eine separate Integration durchzuführen.

## Verallgemeinerung auf andere Gruppen

Wir haben integrierte Wavelets für Wavelet-Transformationen über semidirekten Produkten des  $\mathbb{R}^m$  mit einer Dilatationsgruppe  $H < GL(m, \mathbb{R})$  definiert. Dies war motiviert durch die Euklidische Gruppe mit Dilatation, die zu dieser Klasse von Wavelet-Transformationen gehört und für die Anwendung in der Bildverarbeitung wesentlich ist, sowie durch für diese Klasse bekannte Strukturaussagen. Betrachtet man die geführten Beweise, so zeigt sich, dass die semidirekte Struktur für die grundlegenden Resultate keine wesentliche Rolle spielt. Wichtig ist aber die Operation des  $\mathbb{R}^m$  durch Translation. Dies erlaubt, integrierte Wavelets auch für andere Gruppen zu formulieren.

Als Beispiel sei die Weyl-Heisenberg Gruppe  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}$  erwähnt [HW89, LMR94, Tor95, Teo98]. Sie operiert auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  durch Translation im Zeit- und Fourier-Bereich sowie einen Faktor von Betrag 1. Die zugehörige Wavelet-Transformation wird Gabor-Transformation genannt. Sie lässt sich schreiben als:

$$f = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} \langle f, T_b E_\xi \psi \rangle T_b E_\xi \psi(\omega) d\xi db. \quad (4.22)$$

Die Zulässigkeitsbedingung an ein Gabor-Wavelet  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ist  $\psi \neq 0$ . Formuliert man (4.22) im Fourier-Raum, so lässt sich die Zulässigkeitsbedingung auch schreiben als

$$\int_{\widehat{\mathbb{R}^m}} |T_\xi \hat{\psi}(\omega_0)|^2 d\xi = \|\psi\|_2 =: c_\psi \neq 0.$$

Dieses Integral kann nun analog zu Definition 3.10 partitioniert werden, wodurch integrierte Gabor-Wavelets und eine integrierte Gabor-Transformation definiert werden.





# Kapitel 5

## Grundlagen zur Anwendung in der digitalen Mammographie

Dieses Kapitel führt in die Problemstellung der computerunterstützten Befundung von Mammographien ein und stellt für die folgenden Kapitel Grundlagen aus der Mustererkennung bereit. Das Ziel dieses zweiten Teils der Arbeit ist, Verfahren zu entwickeln, welche frühe Anzeichen für Brustkrebs in digitalen Mammographien zuverlässig detektieren. Im folgenden Kapitel 6 wird dazu ein Algorithmus zur Hervorhebung von Mikroverkalkungen entwickelt. Für diese Anwendung wird die in Kapitel 3 entwickelte integrierte Wavelet-Transformation genutzt. Darüber hinaus zeigt Kapitel 7 Ansätze zur Detektion von Mikroverkalkungen mit Hilfe von Wavelets auf.

In Abschnitt 5.1 werden Grundlagen zur Mammographie sowie der Bildentstehung bei Röntgenverfahren zusammengestellt. In Abschnitt 5.2 wird ein Modell für Mikrokalk entwickelt. Dieses ist Grundlage für die Konstruktion eines Algorithmus zur Hervorhebung von Mikroverkalkungen in Kapitel 6. Abschnitt 5.3 führt Begriffe der Mustererkennung ein: Das Modell des angepassten Filters motiviert die Konstruktion von an Mikrokalk angepassten Wavelets in Kapitel 6. In Abschnitt 5.3.3 wird der Begriffsapparat der Bayes-Klassifikation vorgestellt. Er erklärt die Bedeutung der Konstruktion von Merkmalen in Kapitel 7 und dient auch als formaler Rahmen für die Betrachtungen zur Hervorhebung von Mikrokalk. Abschnitt 5.4 stellt bekannte Grundlagen zur Rauschfilterung in Orthonormalbasen zusammen. Darauf aufbauend zeige ich eine Verallgemeinerung für Frames. Dies bildet die Grundlage für die in Abschnitt 6.9.1 demonstrierte Rauschfilterung mit Frames aus integrierten Wavelets.

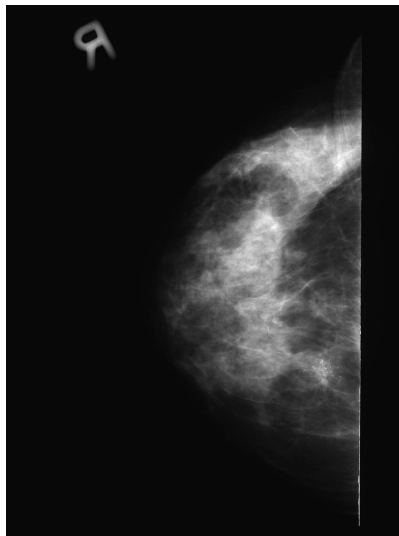
### 5.1 Digitale Mammographie

Wir stellen kurz die für die weitere Betrachtung wesentlichen Fakten über die Bildentstehung bei der Mammographie sowie die Bedeutung von Mikrokalk zusammen und beschreiben daraus abgeleitete Problemstellungen.

## Medizinischer Hintergrund

Mikroverkalkungen sind ein frühes Warnzeichen für Brustkrebs und können das alleinige Anzeichen für ein Mammakarzinom sein [HK<sup>+</sup>96, HB99]. Je früher der Tumor erkannt wird, um so größer ist die Überlebenschance der betroffenen Patientin. Deshalb hat die Detektion von Mikroverkalkungen eine besonders hohe Bedeutung [HK<sup>+</sup>96].

Mikroverkalkungen sind Kalkablagerungen, die durch natürliche Prozesse entstehen und nicht zwangsläufig durch ein Karzinom hervorgerufen werden. Dem Mediziner stehen vier Methoden zur Untersuchung der Brust zur Verfügung. Das sind Tasten, Sonographie, Mammographie und Kernspintomographie. Aber allein die Mammographie, also die Röntgenaufnahme der Brust, bildet Mikroverkalkungen verlässlich ab [HK<sup>+</sup>96]. Abbildung 5.1 zeigt eine Mammographie.



**Abbildung 5.1: Eine Mammographie.** Abbildung c05c aus der Nijmegen-Mammographie Bilddatenbank. Das für Mammographien übliche Röntgenfilm-Format ist 18x24 cm. Die Aufnahme hat eine Auflösung von 0,1 mm und zeigt einen 1536x2048 Bildpunkte großen Ausschnitt.

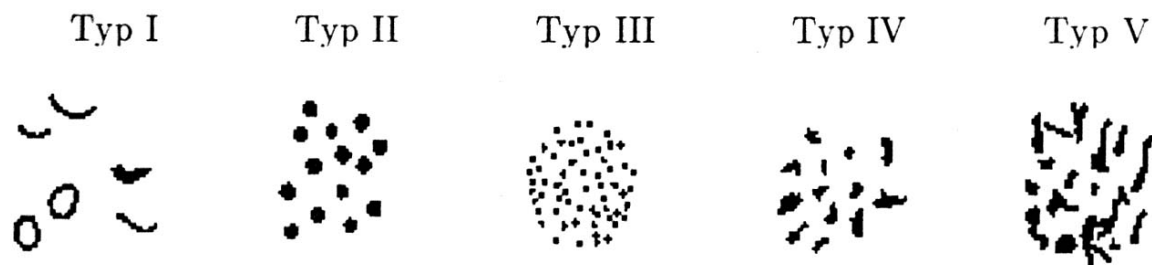
Diese Ablagerungen erscheinen in der Mammographie durch im Vergleich zur Umgebung helle Punkte. Sie können sehr klein und subtil sein und sind mit dem bloßem Auge nur schwer zu erkennen. So werden heute in bis zu 30% der Fälle vom befundenden Arzt eindeutige Zeichen eines Malignoms übersehen [Bic96]. Die Detektion von Mikroverkalkungen wird bei einer Screening-Untersuchung erschwert durch eine überwältigende Mehrheit von normalen Aufnahmen gesunder Patientinnen. Von 100.000 Untersuchungen sind deutlich unter 200 Fälle mit Brustkrebs [HB99].

## Aufbau der Brust

Die weibliche Brust besteht im wesentlichen aus Drüsengewebe, Fett und Gefäßen. Das Drüsengewebe wird in der Mammographie durch helle, faserige Strukturen abgebildet. Fett absorbiert fast keine Strahlung und wird deshalb weitgehend einheitlich dunkel abgebildet. Gefäße bilden leicht zu erkennende, größere Strukturen. Es gibt eine extrem große Vielfalt an Varianten im Aufbau der Brust. Dies ergibt sich unter anderem durch den mit zunehmendem Alter abnehmenden Anteil an Drüsengewebe, der durch Fett ersetzt wird [HK<sup>+</sup>96]. Diese Variabilität erschwert die automatische Auswertung erheblich.

### Wie sehen Mikroverkalkungen aus?

Kalkablagerungen treten auf natürliche Art in Gefäßen auf. Ebenso bilden sich manchmal große Kalkablagerungen von mehreren Millimetern Durchmesser. Diese Verkalkungen gelten als harmlos [HK<sup>+</sup>96]. Durch Analyse verschiedener Form und Lagemerkmale kann der Mediziner zwischen unbedeutendem sowie von einem gutartigen (benign) oder bösartigen (malign) Tumor stammendem Kalk unterscheiden.



**Abbildung 5.2: Klassifikation von Mikrokalk.** Klassifikation von Mikrokalk in fünf Kategorien nach Le Gal, sortiert nach der Wahrscheinlichkeit für einen bösartigen Tumor. Diese ist für Mikrokalk der Klasse I 0% und wächst über 19%, 39%, 59% bis auf 96% in Klasse V<sup>2</sup>.

Als **Mikrokalk** bezeichnet man Kalkablagerungen mit einem Durchmesser von ca. 0.05 mm bis 1 mm [HK<sup>+</sup>96, HB99]. Dies entspricht auf einem mit 0,1mm Pixelgröße digitalisierten Bild ca. 1-10 Bildpunkten. Tumoröser Mikrokalk tritt meist in Clustern von ca. 10 bis 100 Einzelverkalkungen auf. Als medizinisch relevant werden Cluster ab etwa 4 Einzelverkalkungen pro cm<sup>2</sup> betrachtet [HK<sup>+</sup>96, HB99]. Einzelne Mikroverkalkungen eines Clusters können in Form und Größe deutlich variieren. Abbildung 5.2 zeigt eine Klassifikation verschiedener Mikrokalk-Formen. Von bösartigen Tumoren stammender Kalk ist in

---

<sup>2</sup>In [HB99] zitiert aus: M. Le Gal, J.-C. Durand, M. Laurent and D. Pellier, *Conduite a tenir devant une mammographie revelatrice de microcalcifications groupées sans tumeur palpable*, La Nouvelle Presse Medicale, vol. 5, 1973. Die Abbildung ist [HB99] entnommen.

der Regel sehr klein, unregelmäßig in Form und Größe und der durchschnittliche Abstand zwischen Verkalkungen in einem Cluster liegt unter 1 mm.

## Bildentstehung durch Radiographie

Bei der Radiographie wird der Patient mit Röntgenstrahlen aus einer Strahlenquelle durchleuchtet. Ein Detektor misst die von dem Objekt absorbierte Dosis. Dies ist in der Regel ein Röntgenfilm oder eine Speicherfolie. Der Detektor hält Intensitätsdaten fest, diese sind proportional zur Dichte des Körpers. Absorption verhält sich multiplikativ d. h. doppelte Dichte bewirkt eine Halbierung der Intensität [Ewe98]. Inzwischen gibt es auch digitale Röntgendetektoren, welche die Strahlung direkt in elektrische Impulse umwandeln. Durch die Art der Strahlen wirken zahlreiche physikalische Phänomene bei der Bildentstehung mit, die, unter dem Begriff Rauschen zusammengefasst, das ideale Bild verfälschen. Ebenso treten geometrische Verzerrungen auf.

### Rauschen

Quellen für Rauschen sind [Ewe98]:

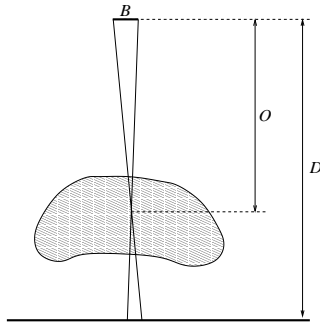
- Das Quantenrauschen der Strahlungsquelle. Dies ist ein klassischer Poisson-verteilter Zerfallsprozess.
- Streustrahlung durch verschiedene Wechselwirkungen im Körper.
- Unschärfe bei der Messung an Detektor durch die Struktur und Körnung des Filmes sowie unterschiedliche Empfindlichkeit in verschiedenen Intensitätsbereichen.
- Elektrisches Rauschen des Meßverstärkers.

Bei Digitalisierung einer Film-Röntgenaufnahme entsteht eine Verzerrung der Grauwertverteilung durch die Kennlinien (Modulationstransferfunktion) des Filmmaterials und der Digitalisierungsvorrichtung (Scanner).

Der Informationsgehalt eines Bildpunktes der digitalisierten Mammographie ergibt sich aus der Dosis der Strahlenquelle. Bei z. B. circa  $2\mu\text{GY}$  Dosis und  $70\text{kV}$  Spannung ist die Strahlung etwa  $70.000$  Quanten/ $\text{mm}^2$  [Ewe98]. Bei Bildpunkten mit  $0,1\text{mm}$  Kantenlänge ergibt das ca.  $700$  Quanten je Pixel. Aus dieser Angabe kann leider nicht direkt auf den benötigten Grauwertumfang für das digitalisierte Bild geschlossen werden, da dazu auch die variierende Empfindlichkeit des Filmes zu beachten ist.

### Geometrie

Beim Abbildungsvorgang finden geometrische Verzerrungen statt. Der wesentlichste Effekt ist dabei die Projektion des dreidimensionalen Körpers in die Ebene [Ewe98]. Dies führt insbesondere dazu, dass sich verschiedene Objekte in der Aufnahme überlagern.



**Abbildung 5.3: Unschärfe bei der Projektion.** Der Durchmesser  $B$  der Röntgenquelle führt, abhängig von Objektabstand  $O$  und Detektorabstand  $D$ , zu einer unscharfen Abbildung des Objektes.

Die **Vergrößerung**  $V := D/O$  ergibt sich als Verhältnis von Objektabstand  $O$  zum Detektorabstand  $D$ . Der Wert beträgt in der Praxis ca. 1,1 bis 1,4. Da die Strahlenquelle nicht ideal punktförmig ist, muss der **Brennfleckdurchmesser**  $B$  berücksichtigt werden. Er beträgt für Mammographie-Geräte etwa 0,36 bis 0,6 mm [Ewe98, HB99], der Brennfleck hat also eine Fläche  $Br$  von ca. 0,01 bis 0,2 mm<sup>2</sup>. Aus Brennfleck und Vergrößerung ergibt sich die **Abbildungsunschärfe**  $U := B(V - 1)$  [Ewe98]. Sie liegt bei obigen Daten zwischen 0,001 mm und 0,08 mm. Bedenkt man, das Mikrokalk einen Durchmesser von etwa 0,05 bis 1 mm hat, ist die Unschärfe etwa zehn mal kleiner als das Objekt.

Erschwert wird die automatische Auswertung von Röntgenaufnahmen durch die fehlende Normierung oder Protokollierung der Aufnahmeparameter. Verschiedene Röntgenapparate und von Hand eingestellte variierende Dosis liefern Bilder wechselnder Qualität. Mammographien haben ein schlechtes Signal-Rauschverhältnis. Dies liegt zum einen an dem Kompromiss zwischen Dosisbelastung der Patientin und Bildqualität, zum anderen an den komplexen Texturen mit sehr feinen Strukturen [Bic96]. Darüber hinaus treten durch den Brustaufbau enorme Kontrastunterschiede auf. Diese fehlende Normierung der Bilddaten erschwert die Konstruktion eines automatischen Verfahrens zur Bildanalyse.

## Problemstellung

Das Ziel ist, den Mediziner dabei zu unterstützen, Mikroverkalkungen in Mammographien zu finden und einzuordnen. Dazu beschränken wir uns auf eine einzelne Aufnahme. Für den Mediziner ist für die Beurteilung von Mikrokalk auch der Vergleich mit früheren Aufnahmen (Historie) sowie der Vergleich auf Asymmetrie zwischen linker und rechter Brust wichtig [HK<sup>+</sup>96]. Dies wird hier vernachlässigt.

Gegeben ist also ein digitales Bild, entstanden durch einen digitalen Röntgendetektor oder Digitalisierung einer Film-Röntgenaufnahme.

Folgende Teilziele werden betrachtet:

- (i) **Hervorheben von Mikrokalk.** Dazu wird die Mammographie nachbearbeitet und mikrokalkförmige Strukturen optisch hervorgehoben. Das ermöglicht dem Mediziner, diese sicherer zu detektieren. In Kapitel 6 wird die Hervorhebung von Mikrokalk untersucht und neue Resultate vorgestellt.
- (ii) **Detektion von Mikrokalk.** Es werden einzelne Verkalkungen oder auch ganze Cluster lokalisiert und an den entsprechenden Stellen der Mammographie Markierungen dargestellt. Das erlaubt dem Mediziner, sich auf die Einordnung der Verkalkungen zu konzentrieren. Wir untersuchen in Kapitel 7 Wavelet-basierte Merkmale für die Detektion von Mikrokalk.
- (iii) **Klassifikation von Mikrokalk-Clustern.** Ein Klassifikationsverfahren ordnet detektierte Mikrokalk-Cluster in unbedeutend, malign oder benign ein. Damit wird ein Befundungsvorschlag für den Mediziner generiert. Dies unterstützt den Mediziner durch eine objektive, da automatisch und reproduzierbar erstellte, sogenannte *second opinion* bei seiner Entscheidung. Dieses Problem wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch die Vielfalt im Brustaufbau, die schlechte Bildqualität einer Röntgenaufnahme sowie die extrem kleine und variantenreiche Form des gesuchten Mikrokalks die Detektion von Mikrokalk zu den anspruchvollsten Aufgaben der medizinischen Bildanalyse gehört [HB99].

## Beurteilung der Qualität eines Verfahrens

Die Güte eines diagnostischen Tests kann durch die Begriffe Sensitivität und Spezifität beschrieben werden [Bic96]. Mit **Sensitivität** wird der Anteil der richtig als positiv erkannten Fälle an der Gesamtzahl der positiven Fälle bezeichnet. **Spezifität** ist der Anteil der richtig als negativ erkannten Fälle an der Gesamtzahl der negativen Fälle. Die Werte sind in der Regel voneinander abhängig: Je höher die Sensitivität eines Verfahrens, um so mehr Fälle, auch negative, werden als positiv markiert. Damit sinkt die Spezifität. Abhilfe schafft die **receiver operating characteristic (ROC) Kurve**. Hierbei werden der Anteil der richtig-positiven (Sensitivität) und der falsch-positiven Fälle (1–Spezifität) für unterschiedlich strengen Schwellwert gegeneinander angetragen. Die Fläche unter der entstehenden Kurve erlaubt, die Güte des Verfahrens zu beschreiben und verschiedene Verfahren zu vergleichen. Dabei kann entweder die ROC-Kurve der Verfahren gemessen werden, oder aber es wird die ROC-Kurve eines befundenen Arztes mit und ohne Unterstützung durch das Verfahren verglichen. Es gibt Variationen dieses Vorgehens, abhängig von der Art der Bewertung. Üblicherweise werden Bilder als ganzes bewertet. Eine Aufnahme gilt bereits als richtig-positiv erkannt, falls das Verfahren für ein Bild mit positivem Befund irgendeine Detektion meldet. Andere Bewertungen beziehen Zahl und Ort der Detektionen in die Beurteilung mit ein, bewerten damit auf der Ebene von Clustern oder Einzelverkalkungen. Ein Kriterium für die Bewertung der Cluster-Detektion findet sich in [Kar91]. Demnach zählt als richtig-positiv, falls zwei oder mehr Punkte innerhalb eines

Mikrokalk-Clusters markiert sind und als falsch-positiv, falls zwei oder mehr Punkte in einer mikrokalkfreien Region von 0,5 cm Durchmesser markiert werden.

Qualität wird auch durch **Reproduzierbarkeit** bestimmt. Dazu gehört, dass alle für die Bildanalyse notwendigen Parameter dokumentiert sind. Die Forderung nach Reproduzierbarkeit der Ergebnisse eines automatischen Verfahrens zur Bildanalyse erzwingt einen deterministischen Ansatz.

## 5.2 Modell für mikrokalkförmige Strukturen

Für ein modellbasiertes Verfahren zur Detektion von Mikrokalk ist eine präzise Definition, was Mikrokalk ist, notwendig. Da die Gestalt von Mikrokalk sich nicht durch eine einfache Funktion fassen lässt, vgl. Abbildung 5.2, findet hier eine Abstraktion statt.

Für die Modellierung mikrokalkförmiger Strukturen betrachten wir:

- (i) **Form.** Mikrokalk  $MC$  wird als ellipsoide Struktur mit Durchmessern von ca. 0.05 mm bis 1 mm modelliert, als Funktion

$$MC(x) := \sqrt{1 - ax^2},$$

wobei  $a$  das Verhältnis der Halbachsen der Ellipse ist. Vergleicht man Abbildung 5.2, so ist das ein gutes Modell für die Kategorien II, III und IV. Kategorie I ist für das Ziel unwesentlich, da hier kein maligner Tumor zu erwarten ist und dieser Kalk leicht sichtbar ist. Das Modell ist auch bei Mikrokalk der Kategorie V nicht optimal. Die Formvielfalt dieses Kalks erlaubt kein allgemeingültiges einfaches Modell. Die Approximation durch ein Ellipsoid ist aber eine akzeptable Näherung.

- (ii) **Dichtebild.** Die Projektion eines Ellipsoids in die Ebene liefert als Dichtebild ein Halbellipsoid  $MC_{Proj}$ , vgl. Abbildung 5.4. Dabei wird näherungsweise parallele Strahlung angenommen.
- (iii) **Intensitätsbild.** Wir nehmen an, das digitale Bild sei proportional zur Intensität der Röntgenstrahlung. Bei digitalem Detektor ist dies gegeben, bei Digitalisierung einer Film-Röntgenaufnahme müssen die Kennlinien des Filmmaterials und des Scanners bestimmt und durch eine Punktoperation korrigiert werden. Das Intensitätsbild eines Ellipsoids ist somit  $\exp(MC_{Proj})$ .
- (iv) **Brennfleck.** Das Bild ist durch die Ausdehnung der Röntgenquelle verschmiert. Bei einem Detektorabstand  $D$  und Objektabstand  $O$  von der Aufnahmeebene, ist die Vergrößerung  $V := D/O$ . Bei einem Brennfleckdurchmesser  $B$  der Röntgenquelle ergibt sich eine Abbildungsunschärfe  $U := B(V - 1)$ . Näherungsweise wird der Objektabstand als konstant angenommen. Dies ist eine bei der Mammographie nicht ganz abwegige Vereinfachung, da der Durchmesser der komprimierten Brust relativ zum Detektorabstand gering ist. Der Effekt, dass weiter vom Detektor entfernt liegende Strukturen unschärfer abgebildet werden, ist daher nicht so stark ausgeprägt,

wie bei anderen Röntgenverfahren. Insbesondere gilt diese Vereinfachung bei der Betrachtung eines einzelnen Mikrokalkherdes.

Diese Unschärfe, die als Überlagerung von Translaten betrachtet werden kann, modelliere ich durch Faltung des Intensitätsbildes mit der charakteristischen Funktion  $\chi_U$  der Abbildungsunschärfe, vgl. Abbildung 5.4, d.h

$$MC_{Bild} = \exp(MC_{Proj}) * \chi_U.$$

Sonstige Einflußfaktoren werden in dem folgenden Modell ignoriert.

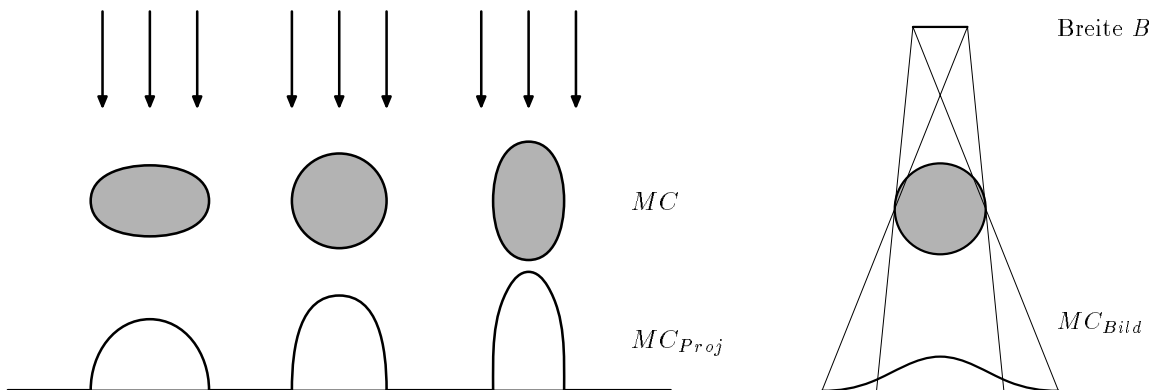
### Modell

Sei das Absorptionsbild  $B$  gegeben. Logarithmieren von  $B$  führt auf eine additive Darstellung, in der Mikrokalk dem Gewebe additiv überlagert ist, d. h.

$$\ln B = \text{Gewebe} + \ln(MC_{Bild}).$$

Wir approximieren  $\ln(MC_{Bild})$  durch eine Gauß-Funktion

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

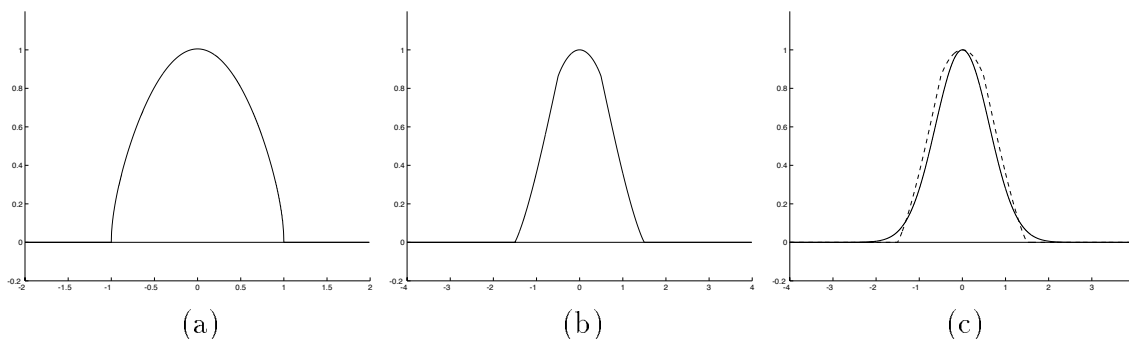


**Abbildung 5.4: Dichtebild und Unschärfe der Röntgenquelle.** Links: Dichtebild verschiedener Ellipsen wie in (i), (ii) modelliert. Rechts: Die Ausdehnung der Röntgenquelle verschmiert die Abbildung, vgl. (iv).

### Diskussion

Analytisch: Das Modell ist komplett im Zeitbereich entwickelt. Die Wahl der Gauß-Funktion ist nicht optimal, wie anhand Abbildung 5.5 zu sehen ist: Die Gauß-Kurve

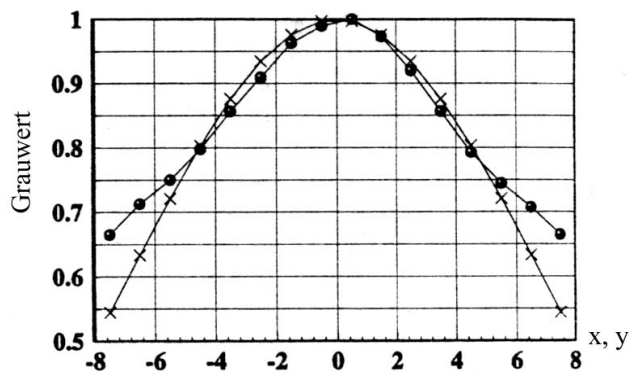




**Abbildung 5.5: Modell für Mikrokalk.** (a) Intensitätsbild  $\exp(MC_{Proj})$  von ellipsoidem Mikrokalk. (b) Faltung mit Abbildungsunschärfe  $U = 0.5$  mal Durchmesser der Ellipse. (c) Die Gauß-Funktion approximiert das Modell.

ist schmaler und hat keine ausgeprägten Kanten. Darüber hinaus ist der Träger nicht kompakt. Dafür kann die Gauß-Funktion auch im Frequenzbereich explizit angegeben werden und ist dort gut lokalisiert. Dies ist ein Vorteil für im Fourier-Raum arbeitende Algorithmen.

Empirisch: In [SH96] wurden in Mammographien Schnitte durch Mikrokalk berechnet und gemittelt. Dies ergab näherungsweise eine Gauß-Kurve, wie in in Abbildung 5.6 dargestellt. Dies zeigt, dass das Modell den Messdaten entspricht.



**Abbildung 5.6: Schnitte durch Mikrokalk.** Dargestellt ist die Mittelung über Profile von 80 Mikroverkalkungen (Punkte). Diese wurden vorher in Höhe und Breite normalisiert. Die durch Kreuze markierte Linie ist eine eingepasste Gauß-Kurve. Die Abbildung stammt aus [SH96]. Der Auswertung lag die Nijmegen Mammographie-Bilddatenbank zugrunde.

Eine weitere Verifikation des Modells ergibt sich aus einem Ansatz, der auf einem neuronalen Netz aufbaut [RMM<sup>+</sup>96]. Dieses Netz wurde auf die Detektion von Mikrokalk

trainiert und das dadurch generierte Suchmuster (Template) ausgegeben. Dieses sieht einer Gauß-Funktion ähnlich.

Ziel ist nun, den so modellierten Mikrokalk im digitalen Bild hervorzuheben und zu detektieren. In Abschnitt 6.4.1 wird dazu das Mikrokalk-Modell mit einem Modell für Rauschen verknüpft und ein angepasstes Filter konstruiert. Abschnitt 6.4.1 stellt schließlich die zugehörige Filterbank aus integrierten Wavelets bereit.

## 5.3 Grundlagen zur Mustererkennung in der digitalen Bildverarbeitung

Hervorheben und Detektieren von Mikrokalk sind Aufgaben aus der Mustererkennung. Dieser Abschnitt beschreibt knapp die wesentlichen Grundlagen.

In Abschnitt 5.3.1 wird das Konzept des angepassten Filter eingeführt. Dieses Konzept ist Grundlage für die Modellierung der Wavelet-Zerlegung bei der Hervorhebung von mikrokalkförmigen Strukturen. Die folgenden Abschnitte stellen Grundlagen zur stochastischen Mustererkennung mit Bayes-Klassifikation vor. Im Mittelpunkt der Modellierung steht der Klassifikator, der Bildteile zu vorgegebenen Klassen zuordnet.

Der angepasste Filter ist ein analytischer Ansatz. Anhand eines Modells des gesuchten Objektes wird ein eindeutiger Filter konstruiert. Dagegen muss ein Klassifikator erst anhand von Trainingsdaten für eine Aufgabe angelernt werden. Für die Problemstellung der Detektion von Mikrokalk stehen nur wenig Trainingsdaten zur Verfügung. Dagegen besitzen wir ein recht gutes Modell für mikrokalkförmige Strukturen.

In Kapitel 6 wird ein an mikrokalkförmige Strukturen angepasster Filter konstruiert und für Hervorhebung angewendet. In Kapitel 7 werden Merkmale für die Detektion mit Hilfe eines Bayes-Klassifikators untersucht.

Der bereits verwendete Begriff des Filters soll hier definiert werden.

**Definition 5.1** Als **Filter** bezeichnen wir einen durch eine Funktion  $\varphi \in L^1(G)$  gegebenen Faltungsoperator auf  $L^2(G)$ . Gewöhnlich ist  $G = \mathbb{R}^m$  oder  $G = \mathbb{Z}^m$ .

Die charakterisierende Eigenschaft für einen **Tiefpass-Filter** ist  $\int_G \varphi(x) dx \neq 0$

Die charakterisierende Eigenschaft für einen **Hochpass-Filter** ist  $\int_G \varphi(x) dx = 0$ .

### 5.3.1 Angepasste Filter

Ziel des angepassten Filters (*matched filter*) ist, ein bis auf seine Position bekanntes Signal  $s$  in einem verrauschten Hintergrund  $N$  zu detektieren. Der Begriff wird in [Cas96, 11.5.5] in der Sprache der Signalverarbeitung ausgeführt. Wir nutzen dieses Konzept in Kapitel 6 zur Modellierung der Wavelet-Zerlegung bei der Hervorhebung von mikrokalkförmigen Strukturen.

Sei  $s \in L^2(T)$  das Signal, wobei  $T = \mathbb{R}^m, \mathbb{Z}^m$  oder  $\mathbb{Z}_n^m, m \geq 1$ . (Im Fall  $T = \mathbb{Z}_n^m$  vereinfachen sich im folgenden Integrale über die duale Gruppe  $\hat{T}$  kanonisch zu Summen.) Das Rauschen  $N := (N_t)_{t \in T}$  sei eine ergodische Zufallsvariable, d. h.  $N$  wird durch seine Spektralverteilungsfunktion  $P_N$  charakterisiert. Das gemessene Signal ist eine Realisierung des stochastischen Prozesses

$$X := s + N.$$

Die Aufgabe soll durch einen linearen Filter  $k \in L^2(T)$  gelöst werden. Sei

$$Y := X * k = s * k + N * k$$

und bezeichne  $u := s * k$  und  $v := N * k$ . Der Filter  $k$  soll so konstruiert sein, dass  $Y$  an Stellen an denen  $s$  auftritt große Werte annimmt, dagegen an Stellen, an denen das Rauschen dominiert kleine Werte annimmt. Als Maß für die Qualität des Filters wird das mittlere Signal-Rausch Energieverhältnis verwendet.

**Definition 5.2** Sei  $X := s + N$ . Als **mittleres Signal-Rausch Energieverhältnis** (signal-to-noise power ratio) bezeichnen wir

$$\rho_X(t) := \frac{s^2(t)}{E(N^2(t))}, \quad t \in T.$$

Damit lässt sich eine Optimalitätsbedingung formulieren.

**Definition 5.3** Sei  $X := s + N$ . Ein Filter  $k$  heißt **angepasstes Filter**, falls das mittlere Signal-Rausch Energieverhältnis  $\rho_Y(t)$  von  $Y := X * k$  in  $t = 0$  maximiert wird.

Eine Motivation: Das mittlere Signal-Rausch Energieverhältnis von  $Y$  lässt sich umformen zu

$$\rho_Y(0) = \frac{u^2(0)}{E(v^2(0))} = \frac{s * k(0)}{E(N * k(0))} = \frac{\langle s, \tilde{k} \rangle}{\langle N, \tilde{k} \rangle}.$$

Nehmen wir an, das Signal  $s$  sei in 0 lokalisiert, so wird also gefordert, dass  $Y$  in 0 maximalen Wert annimmt. Ist  $s$  an einer anderen Stelle  $t_0 \in T$  lokalisiert, d. h.  $\tilde{s} := T_{t_0}s$ , dann folgt  $\tilde{Y} = T_{t_0}s * k + N * k = T_{t_0}(s * k + T_{-t_0}N * k)$  und aufgrund der Translationsinvarianz des Rauschens im Erwartungswert ( $N$  ist als ergodische Zufallsvariable stationär) gilt  $E(\tilde{Y}(t)) = T_{t_0}E(Y(t))$ , d. h.  $Y$  nimmt in  $t_0$  maximalen Wert an. Das Optimalitätskriterium ist also für die Aufgabe geeignet. Der angepasste Filter detektiert also die Position des bekannten Signales in  $X$ . Wir zeigen nun, wie  $k$  zu konstruieren ist.

**Proposition 5.4** [Cas96, 11.5.5.1] Es gilt

$$\rho_Y(0) = \frac{\langle \hat{s}, \hat{k} \rangle}{\int_{\hat{T}} |\hat{k}(\omega)|^2 P_N(\omega) d\omega}. \quad (5.1)$$

BEWEIS Für diese Umformung wird die Ergodizität von  $N$  verwendet.  $\square$

**Proposition 5.5** [Cas96, 11.5.5.3] *Es gilt*

$$\rho_Y(0) \leq \rho_{max} := \int_{\hat{T}} \frac{|\hat{s}(\omega)|^2}{P_N(\omega)} d\omega.$$

*Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein angepasstes Filter  $k$  ist  $\rho_Y(0) = \rho_{max}$ .*

**BEWEIS** Die Bedingung entsteht, indem der Zähler von 5.1 geeignet erweitert und durch die Cauchy-Schwarz Ungleichung nach oben abgeschätzt wird.  $\square$

**Lemma 5.6** [Cas96] *Der im Fourier-Raum punktweise durch*

$$\hat{k}_0(\omega) := C \frac{\overline{\hat{s}(\omega)}}{P_N(\omega)}, \quad \omega \in \hat{T}$$

*definierte Filter  $k$  ist ein angepasster Filter (so er denn existiert). Der Filter ist eindeutig bis auf eine Normierungskonstante  $C$ .*

**BEWEIS** Durch Nachrechnen wird für  $k_0$  die Bedingung  $\rho_Y(0) = \rho_{max}$  verifiziert. Die Eindeutigkeit folgt aus der Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungleichung.  $\square$

Nach dem Satz von Wiener können wir die Frage nach der Existenz eines so bestimmten Filters präzisieren.

**Satz 5.7** (Wiener) *Sei  $G$  kompakt. Sei  $f \in A(G)$  und  $f(\omega) \neq 0$  für  $\omega \in G$ . Dann gilt  $f^{-1} \in A(G)$ .*

Dies ist ein klassisches Resultat aus der harmonischen Analyse. Ein Beweis findet sich in [Kat76, VIII, 2.9] oder [Rud87, 18.21].  $A(G)$  bezeichnet den Raum aller Funktionen, deren Fourier-Transformierte in  $L^1(\hat{G})$  liegen.

Sei die Autokorrelation des Rauschens  $N$  integrierbar, d. h.  $P_N \in A(\mathbb{T}^m)$  und die Spektralverteilungsfunktion  $P_N$  verschwinde nirgends. Dann folgt nach dem Satz von Wiener  $P_N^{-1} \in A(\mathbb{T}^m)$ . Insbesondere existiert der angepasste Filter  $k_0$  als Faltungsprodukt der  $L^2$ -Funktion  $s$  mit der  $L^1$ -Funktion  $\widehat{P_N^{-1}}$ .

**Bemerkung 5.8** Ein angepasster Filter ist ein in obigem Sinn optimaler linearer Filter. Die Forderung der Ergodizität des Rauschens  $N$  impliziert insbesondere Stationarität. Der Filter ist also für Signale, denen nichtstationäres Rauschen überlagert ist nicht optimal. Es handelt sich beim angepassten Filter um einen Detektor, nicht, wie z. B. bei der Rauschfilterung, um die Approximation eines Signales. Der Filter erhält nicht die Struktur des Signales.  $\square$

Lineare Filter sind für die Hervorhebung von Mikrokalk in Mammographien nicht geeignet. Die Hervorhebung kontrastreicher Mikroverkalkungen würde gegenüber kleineren dominieren. Trotzdem nutzen wir in Kapitel 6 das Modell des angepassten Filters für die Wavelet-Zerlegung der Mammographie. Eine nichtlineare Komponente auf Wavelet-Koeffizienten, der Enhancement-Operator, sorgt dann für eine geeignete Gewichtung.

Ausblick: In Abschnitt 6.4.1 wird die Struktur von Brustgewebe durch einen stationären Prozess als Rauschen modelliert und mit Hilfe des in Abschnitt 5.2 entwickelten Modells ein an Mikrokalk angepasstes Filter konstruiert.

Das nichtstationäre Hintergrundrauschen in Mammographien filtern wir dagegen mit einer Wavelet-basierten adaptiven Rauschfilterung, die in Abschnitt 5.4 vorgestellt wird.

### 5.3.2 Mustererkennung

Wir beschreiben kurz typische Aufgaben in der Mustererkennung (*pattern recognition*) [Cas96, TYLM00]. Das Problem der Bildakquisition, also der Bildgewinnung und Digitalisierung analoger Daten für den Computer wird ausgeblendet. Gegeben ist ein Bild, in unserem Fall eine digitale Mammographie, sowie eine Menge von Klassen, z. B. Gewebe, Gefäße, Hintergrund und Mikrokalk. Ziel der Mustererkennung ist, das Bild in Regionen zu zerlegen, die diesen Klassen zugeordnet werden.

- **Vorverarbeitung.** Hierzu gehören Rauschfilterung und Restauration. Weiter sind die Bilddaten möglichst zu normieren, z. B. durch standardisierte Aufnahmebedingungen. Weitere Ziele sind Kanten zu schärfen oder andere interessante Strukturen vom Hintergrund abzuheben, z. B. durch Operation auf dem Grauerthistogramm, Filtern und morphologische Bearbeitung [Cas96].
- **Segmentation.** Das Bild wird in Regionen zerlegt, die Objekte enthalten. Dabei wird noch keine Zuordnung zu Klassen vorgenommen. Als Extremfall kann jeder Bildpunkt bereits als Region betrachtet werden. Es gibt verschiedene Ansätze zur Segmentation: Bei regionorientierter Segmentation werden Bildpunkte ähnlicher Struktur zu einer Region zusammengefasst. Typisches Beispiel ist der *region grow* Algorithmus [Cas96]. Bei rand- oder kantenorientierter Segmentation werden die Grenzen zwischen Regionen ermittelt, typischerweise mit Gradientenverfahren, und mit Methoden wie *curve fitting*, *edge contour following* zu Grenzlinien verbunden.
- **Merkmalsextraktion.** Für jede Region wird ein Merkmalsvektor berechnet. Im Gegensatz zum Klassifikator sind Merkmale problemabhängig. Man kann deskriptive und generative Merkmale unterscheiden. Deskriptive Merkmale sind z. B. Größe, Form, Orientierung oder relative Helligkeit, welche aus einem Modell stammen. Generative Merkmale sind z. B. Mittelwert oder Standardabweichung, welche allgemein zur Verfügung stehen.
- **Klassifikation.** Ein Klassifikator ordnet die Regionen anhand der Merkmalsvektoren den Klassen zu. Dies wird im folgenden Abschnitt ausgeführt.

Kapitel 6 ist der Hervorhebung von Mikrokalk gewidmet, was als Vorverarbeitung interpretiert werden kann. Als Spezialfall wird in Abschnitt 6.9.1 die Rauschfilterung von Mammographien untersucht. In Kapitel 7 werden Merkmale für die Detektion von Mikrokalk untersucht. Diese können zur pixelweisen Klassifikation des Bildes genutzt werden.

### 5.3.3 Bayes'sche Klassifikation

Eine abstrakte Einführung in die Bayes-Klassifikation und deren Anwendung in der Mustererkennung findet sich in dem Buch [DH73], aus dem hier hauptsächlich zitiert wird. Den aktuellen Stand der statistischen Mustererkennung fasst ein Übersichtsartikel [JDM00] zusammen. Die Bayes-Klassifikation liefert den formalen Rahmen für die Modellierung der in den folgenden Kapiteln behandelten Hervorhebung und Detektion mikrokalkförmiger Strukturen.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeits-Raum. Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf  $\Omega$  mit Werten in Räumen  $B$  bzw.  $S$ , wobei wir  $S$  endlich annehmen. Auf  $B \times S$  ist dadurch eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(b, s)$  definiert.  $P(s)$  ist die **a priori Wahrscheinlichkeit** von  $s \in S$ .  $P(X|s)$  ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von  $X$  unter der Bedingung  $Y = s$ . Die **a posteriori Wahrscheinlichkeit**  $P(s|X)$  wird durch die Bayes-Regel

$$P(s|X) = \frac{P(X|s)P(s)}{P(X)}$$

bestimmt.

Der Raum  $B$  steht für Beobachtungen, der Raum  $S$  für die reale Situation. Sei weiter  $A$  eine Menge von Aktionen. Ziel der Klassifikation ist, einer Beobachtung  $b \in B$  eine zur realen Situation  $s$  passende Aktion  $A$  zuzuordnen. Ein **Klassifikator** ist also eine Abbildung  $K : B \rightarrow A$ . Fehler werden durch eine **Kostenfunktion**  $\lambda : A \times S \rightarrow \mathbb{R}$  bewertet. Ist die reale Situation  $s$  und wir entscheiden uns für Aktion  $a$ , so machen wir einen Fehler von  $\lambda(a, s)$ . Wir betrachten im folgenden nur Aktionen  $a_j := \{„Wähle  $s_j$ “\}$ , d. h.  $A \equiv S$ . Als Kostenfunktion wird in diesem Fall oft  $\lambda(a_i, s_j) = 1 - \delta_{i,j}$  gewählt. Jeder Fehler wird mit gleichem Gewicht bestraft. Das Konzept der Aktionen erlaubt flexiblere Klassifikationsergebnisse wie  $\{„Beobachtung kann nicht sicher zugeordnet werden“\}$ . Der erwartete Fehler für Aktion  $a$

$$R(a|X) := \sum_{s \in S} \lambda(a, s)P(s|X)$$

heißt **bedingtes Risiko**. Das **Risiko** ist die Summe

$$R = \int_B R(a(X)|X)dP(X) \tag{5.2}$$

Ein **Bayes Klassifikator** ist ein Klassifikator, welcher  $R$  minimiert. Er ist im allgemeinen nicht eindeutig. Er entscheidet sich bei jeder Beobachtung  $b \in B$  für die Aktion  $a \in A$  mit minimalem bedingtem Risiko, formal:

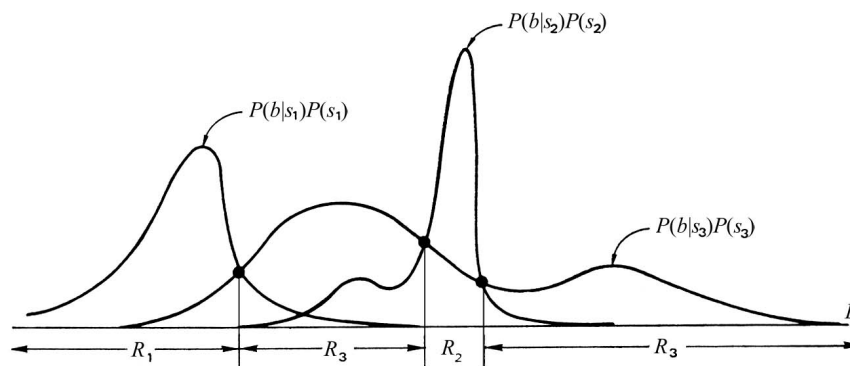
$$a_{min}(X = b) := \operatorname{argmin}_{a \in A} R(a|X = b).$$

Das entsprechende minimale Risiko

$$R_{min} = \int_B R(a_{min}(X)|X)dP(X)$$

heißt **Bayes-Risiko**. Es ist das Risiko, welches auch durch den besten Klassifikator nicht unterboten werden kann. Ein Bayes-Klassifikator ist also für die gegebene Modellierung optimal.

Bei Bayes-Klassifikation wird implizit die Annahme gemacht, dass aufeinander folgende Beobachtungen  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  nicht voneinander abhängen. D. h.  $X_t = X, \forall t \in \mathbb{Z}$ . Diese Annahme ist zum Beispiel bei der Auswertung von Mammographien verschiedener Patienten erfüllt. Nimmt man eine Bildserie von einem einzelnen Patienten ist diese Annahme bereits verletzt.



**Abbildung 5.7: Bayes-Klassifikation.** Dargestellt sind abhängig von der Beobachtung  $b$  die gewichteten a posteriori Wahrscheinlichkeiten verschiedener Aktionen  $s_1, s_2, s_3$ . Ein Bayes-Klassifikator unterteilt den Raum der Beobachtungen in zugehörige Entscheidungsregionen  $R_1, R_2, R_3$ . Für jede Beobachtung  $b \in B$  wird die Aktion  $s \in S$  gewählt, für die das bedingte Risiko minimal ist.

Das zu einer Partition  $(R_a)_{a \in A}$  der Beobachtungen  $B$  in Entscheidungsregionen gehörende Risiko lautet

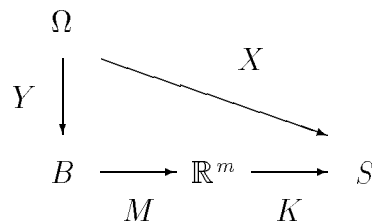
$$R = 1 - \sum_{a \in A} \int_{R_a} P(a|X)dP(X).$$

Die optimale Partition hat die Gestalt  $R_a \subseteq \{b \in B; P(a|X = b) \geq R(a'|X = b), \forall a' \in A\}, a \in A$ .

Das Problem für die praktische Anwendung ergibt sich nun allein aus der mangelnden Kenntnis der Verteilungen von  $X$  und  $Y$ . Ein Klassifikator erzeugt eine Partition der Beobachtungen anhand vorgegebenen Datenmaterials (ground truth). Dies geschieht oft durch Parameter, welche durch einen **Schätzer** bestimmt werden. Dieser Prozess wird **Training** oder auch **Anlernen** des Klassifikators genannt. Es gibt abhängig vom Umfang

des verfügbaren Datenmaterials und der möglichen Komplexität der Entscheidungsregionen zahlreiche Klassifikatoren. Ein **Bayes-Schätzer** ist ein Klassifikator, dessen Risiko  $R$  für wachsendes Datenmaterial gegen das Bayes-Risiko  $R_{min}$  konvergiert.

Um die Lernphase eines Klassifikators zu vereinfachen, wird die Dimension der Beobachtungen durch Merkmale reduziert. Dazu wird ein **Merkmalsvektor**  $M : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  bestimmt. Dadurch nimmt man u. U. ein höheres Bayes-Risiko für den Bayes-Klassifikator auf  $B' = M \circ B$  in Kauf, da bei der Dimensionsreduktion Information verloren gehen kann. Die Entscheidungsregionen werden aber vereinfacht und können deshalb durch den Klassifikator bei gleicher Trainingsmenge besser approximiert werden.



**Abbildung 5.8: Merkmalsvektor und Klassifikator.** Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  modellieren Beobachtungen  $B$  von realen Zuständen  $S$ . Für die Zuordnung einer Beobachtung  $b \in B$  zu einem Zustand  $s \in S$  wird auf dem Bild ein Merkmalsvektor  $M(b)$  berechnet und dessen Wert durch einen Klassifikator  $K$  einem Zustand  $s$  zugeordnet.

Es gibt eine Vielzahl von Klassifikatoren. Diese beruhen auf verschiedenen Konstruktionsideen. Man kann grob in drei Klassen aufteilen [JDM00]:

- (i) Ein Ansatz beruht auf Schätzungen der a posteriori Verteilungen. Diese können parametrisch oder nicht parametrisch sein. Je höher dabei die Zahl der Freiheitsgrade ist, um so mehr Trainingsdaten sind für diesen Klassifikator notwendig. Typische Beispiele für parametrische Klassifikatoren sind multivariate Gauß-Verteilungen. Die Parameter werden z. B. mit einem Maximum Likelihood Schätzer bestimmt. Ein nichtparametrischer Klassifikator ist z. B. der  $k$ -nächste Nachbarn Klassifikator.
- (ii) Ein anderer Ansatz versucht ähnliche Daten der gleichen Klasse zuzuordnen. Dazu ist eine geeignete Metrik auf dem Merkmalsraum notwendig. Ein Beispiel ist der nächste Mittelwert Klassifikator, im einfachsten Fall identisch zum 1-nächster Nachbar Klassifikator. Jede Klasse wird durch den Mittelwert aller Trainingsbeispiele für diese Klasse repräsentiert.



- (iii) Der dritte Ansatz ist, die Ränder der Entscheidungsregionen durch Optimierung eines Fehlerkriteriums zu konstruieren. Ein Beispiel ist Fisher's lineare Diskriminante [DH73], die den quadratischen Fehler zwischen dem Ergebnis des Klassifikators und dem vorgegebenen Wert der Testdaten minimiert. Zu dieser Klasse gehören auch einige Varianten von neuronalen Netzen. Neuronale Netze können aber, abhängig von ihrem Aufbau und der Trainingsmethode, auch zu einer der obigen Klassen gehören.

Es gibt keinen universell überlegenen Klassifikator. Abhängig von der zu einem speziellen Problem verfügbaren Verteilungsinformationen und der Menge an Trainingsdaten erweisen sich unterschiedliche Klassifikatoren als geeignet.

Der 1-nächster Nachbar Klassifikator ist leicht zu implementieren, besitzt keine einstellbaren Parameter und gilt als sehr robust. Er wird deshalb als Benchmark für alle anderen Klassifikatoren empfohlen [JDM00]. Ist das Klassifikationsergebnis mit diesem Klassifikator schlecht, so sollte erst die Auswahl der Merkmale überdacht werden, bevor ein komplexerer Klassifikator verwendet wird. Dazu auch ein Zitat aus [Wou98]: *Sind gute Merkmale verfügbar, so wird jeder beliebige Klassifikator erfolgreich sein, falls nicht, wird selbst die fortschrittlichste Methode scheitern.*

Wesentlich ist also die Wahl der Merkmale. Dies motiviert, in Kapitel 7 zur Detektion von Mikroverkalkungen Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten zu konstruieren und deren Nutzen nur mit elementaren Methoden zu demonstrieren. Eine eingehendere Analyse, welcher auf diesen Merkmalen aufbauende Klassifikator die besten Ergebnisse liefert, ist dann, wenn auch aufwendig, eine Routinetätigkeit.

## 5.4 Nichtlineare Rauschfilterung mit Wavelets

In Abschnitt 6.9.1 des nächsten Kapitels wird eine adaptive Rauschfilterung in Frames zur Vorverarbeitung von Mammographien betrachtet. Diese Abschnitt entwickelt die notwendigen mathematischen Grundlagen. Es wird eine klassische Methode zur Rauschfilterung in Wavelet-Basen vorgestellt, die auf D. Donoho und I. Johnstone zurückgeht [DJ94]. In der Stochastik wird dies nichtparametrische Regression genannt. Die zugrunde liegende Problemstellung ist, aus der Messung  $X := f + N$  eines von Rauschen  $N$  additiv überlagerten unbekanntes Signales  $f$  das Signal  $f$  zu schätzen.

Die Ergebnisse verallgemeinere ich in Abschnitt 5.4.3 auf Frames. Dies bildet die Grundlage für den in Abschnitt 6.9.1 vorgestellten Algorithmus zur Rauschfilterung in festen Frames.

### 5.4.1 Rauschfilterung in Orthogonalbasen

Die Aussagen dieses Abschnitts sind bekannt und weitgehend [Mal98] entnommen. Sei  $f \in L^2(I)$  ein Signal, aus dem Funktionen-Hilbert-Raum über einer endlichen Grundmenge  $I$ . Weiter sei  $W := \{w_i\}_{i \in I}$  eine Orthogonalbasis von  $L^2(I)$ . Das Rauschen  $N := (N_i)_{i \in I}$  sei

Gauß-verteilttes weißes Rauschen (vgl. A.5) mit Varianz  $\sigma^2$ . Das gemessene Signal  $X$  ist eine Realisierung des stochastischen Prozesses

$$X := f + N.$$

Wir betrachten die Zerlegung in der Basis  $\mathcal{W} := \{w_i\}_{i \in I}$ ,

$$\langle X, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle + \langle N, w_i \rangle.$$

Da  $\mathcal{W}$  eine Orthogonalbasis ist, sind  $\langle N, w_i \rangle$  unabhängige, Gauß-vertelte Zufallsvariablen mit Varianz  $\sigma^2$  und Mittelwert 0.

### Idealer Schätzer

Wir betrachten den nichtlinearen Schätzer

$$\tilde{X} := \sum_{i \in I} \langle X, w_i \rangle S(i) w_i,$$

der die Koeffizienten der Basiszerlegung mit Werten  $S(i)$  gewichtet, wobei die Konstanten  $S(i) \in \mathbb{C}$  von  $f$  abhängen dürfen.

**Lemma 5.9** [Mal98] *Mit obigen Bezeichnungen gilt: Der  $L^2$ -Fehler  $E(\|f - \tilde{X}\|^2)$  wird minimiert durch*

$$S(i) := \frac{|\langle f, w_i \rangle|^2}{|\langle f, w_i \rangle|^2 + \sigma^2}, \quad i \in I. \quad (5.3)$$

BEWEIS Es gilt

$$E(\|f - \tilde{X}\|^2) = \sum_{i \in I} E\left(\left(\langle f, w_i \rangle - \langle X, w_i \rangle S(i)\right)^2\right)$$

Da  $X = f + N$  und  $E(\langle f, w_i \rangle^2) = \sigma^2$ , folgt

$$E\left(\left(\langle f, w_i \rangle - \langle X, w_i \rangle S(i)\right)^2\right) = |\langle f, w_i \rangle|^2 (1 - S(i))^2 + \sigma^2 S(i)^2$$

Als Polynom in  $S(i)$  betrachtet, ergibt sich als Extremum (5.3). □

Der  $L^2$ -Fehler bei optimaler Wahl von  $S$  lautet dann

$$\varepsilon_{ideal} = E(\|f - \tilde{X}\|^2) = \sum_{i \in I} \frac{|\langle f, w_i \rangle|^2 \sigma^2}{|\langle f, w_i \rangle|^2 + \sigma^2}$$

## Hard threshold

Wir vereinfachen das Problem, indem wir nur  $S(i) \in \{0, 1\}$  betrachten. Der Schätzer reduziert in diesem Fall also die Koeffizienten auf eine Teilmenge. Der optimale, von  $f$  abhängige, Schätzer  $S$  lautet dann

$$S(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |\langle f, w_i \rangle|^2 \geq \sigma^2, \\ 0 & \text{falls } |\langle f, w_i \rangle|^2 < \sigma^2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Der  $L^2$ -Fehler mit dieser optimalen Wahl lautet

$$\varepsilon_{opt} = E(\|f - \tilde{X}\|^2) = \sum_{i \in I} \min\{|\langle f, w_i \rangle|^2, \sigma^2\} \quad (5.5)$$

Da  $\langle f, w_i \rangle$  in der Regel unbekannt ist, muß  $S$  unabhängig von  $f$  definiert werden. Dazu wenden wir den Schwellwert-Operator (*hard threshold*)

$$S_h(x) := \begin{cases} x & \text{falls } |x| \geq T, \\ 0 & \text{falls } |x| < T, \end{cases}$$

auf die verrauschten Koeffizienten  $\langle X, w_i \rangle$  an. Der Schätzer lautet in diesem Fall

$$\tilde{Y} := \sum_{i \in I} S_h(\langle X, w_i \rangle) w_i. \quad (5.6)$$

D. Donoho und I. Johnstone haben gezeigt, dass der dabei entstehende Fehler im wesentlichen bis auf einen Faktor durch den optimalen Fehler  $\varepsilon_{opt}$  beschränkt werden kann.

**Satz 5.10** [DJ94, Theorem 4] (**Stationäre Rauschfilterung in Orthonormalbasen**)  
Für den Schwellwert  $T_I := \sigma \sqrt{2 \ln(|I|)}$  und  $|I| > 3$  gilt für den mittleren Fehler

$$\varepsilon = E(\|f - \tilde{Y}\|^2) \leq (2 \ln |I| + 1) \left( \sigma^2 + \sum_{i \in I} \min\{|\langle f, w_i \rangle|^2, \sigma^2\} \right)$$

## Bemerkungen 5.11

- (a) Der Schwellwert  $T_I$  ist in folgendem Sinn optimal: Die Koeffizienten  $N_i := \langle N, w_i \rangle$  sind Gauß-verteilt mit Varianz  $\sigma^2$ . Es gilt für wachsende Dimension  $|I|$  die Approximation

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} P \left( T_I - \frac{\sigma \ln \ln |I|}{\ln |I|} \leq \max_{i \in I} |N_i| \leq T_I \right) = 1.$$

- (b) Der Schwellwert wächst mit  $|I|$ , da mit wachsender Zahl an Realisierungen der Gauß-Verteilung auch Rauschkoeffizienten mit beliebig hoher Amplitude auftreten können.

- (c) Der Schwellwert ist nicht optimal in dem Sinn, dass er den Fehler  $\varepsilon$  nicht minimiert. Dazu sind in der Praxis etwas kleinere Schwellwerte  $T$  vorteilhaft. Es gilt aber im Limes [DJ94, Theorem 2]

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} \frac{T_I}{\sqrt{2 \ln |I|}} = 1.$$

### Soft threshold

Ein zum *hard threshold* alternativer Ansatz ist das *soft threshold*. Der Operator lautet

$$S_s(x) := \begin{cases} x - T & \text{falls } x > T, \\ 0 & \text{falls } |x| \leq T, \\ x + T & \text{falls } x < -T. \end{cases}$$

Satz 5.10 gilt auch für soft threshold [DJ94, Theorem 1].

### Bemerkungen 5.12

- (a) Die Motivation für soft threshold ist folgende: Das geschätzte Signal  $\tilde{Y}$  sollte dieselbe Regularität wie das Signal  $f$  aufweisen. Eine aufgrund Satz 3.58 hinreichende Bedingung dafür ist

$$|\langle \tilde{Y}, \omega_i \rangle| \leq |\langle f, \omega_i \rangle|.$$

Diese Bedingung wird durch soft threshold bei idealer Wahl der Koeffizienten erfüllt. Dagegen erfüllt hard threshold die Bedingung nicht, da Koeffizienten über dem Schwellwert  $T$  unverändert bleiben.

- (b) Das soft threshold mit idealer Wahl der Koeffizienten löscht Rauschen in allen Koeffizienten und damit besser als hard threshold. Dabei wird aber auch ein größerer Anteil des Signales entfernt. Dies führt dazu, dass in der Praxis kleinere, als die idealen Schwellwerte verwendet werden.

## 5.4.2 Nichtstationäre Rauschfilterung

In der Regel ist Rauschen nicht stationär. Sei das Rauschen  $N := (N_i)_{i \in I}$  unabhängig Gauß-verteilt, aber nicht mehr weiß, d. h. die Varianz  $\sigma_i$  von  $N_i$  hängt vom Index  $i$  ab. Für diesen Fall gibt es eine einfache Verallgemeinerung obiger Ergebnisse.

Wir betrachten wieder die Zerlegung in der Basis  $\mathcal{W}$ ,

$$\langle X, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle + \langle N, w_i \rangle.$$

Da  $\mathcal{W}$  eine Orthogonalbasis ist, sind  $\langle N, w_i \rangle$  Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit Varianz  $\sigma_i^2$ .

Der optimale hard threshold  $S$  lautet in diesem Fall

$$S(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |\langle f, w_i \rangle|^2 \geq \sigma_i^2, \\ 0 & \text{falls } |\langle f, w_i \rangle|^2 < \sigma_i^2. \end{cases}$$

Erneut kann auf den verrauschten Koeffizienten  $\langle X, w_i \rangle$  ein Schwellwert-Operator oder ein soft-threshold angewendet werden. Es gilt die direkte Verallgemeinerung von Satz 5.10.

**Satz 5.13** [JS97, Theorem 1] (**Nichtstationäre Rauschfilterung in Orthonormalbasen**) Für Schwellwerte  $T_i := \sigma_i \sqrt{2 \ln(|I|)}$  und  $|I| > 3$  gilt für den mittleren Fehler bei hard-threshold und soft-threshold

$$\varepsilon = E(\|f - \tilde{Y}\|^2) \leq (2 \ln |I| + 1) \left( \tilde{\sigma}^2 + \sum_{i \in I} \min\{|\langle f, w_i \rangle|^2, \sigma_i^2\} \right)$$

Dabei ist  $\tilde{\sigma}^2 := \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \sigma_i^2$ .

### 5.4.3 Rauschfilterung in Frames

In Abschnitt 6.9.1 werden wir Rauschfilterung auf festen Wavelet-Frames durchführen. Die dabei erzielten Ergebnisse sind deutlich besser als bei Rauschfilterung in Orthonormalbasen. In diesem Abschnitt wird dazu die Fehlerabschätzung aus Satz 5.13 auf Frames übertragen. Soweit mir bekannt ist, ist dies neu.

Sei das Rauschen  $N := (N_i)_{i \in I}$  Gauß-verteilt, aber nicht mehr weiß, d. h. die Varianz  $\sigma_i$  von  $N_i$  hängt vom Index  $i$  ab. Die Koeffizienten  $\langle N, w_i \rangle$  sind in diesem Fall Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit Varianz  $\sigma_i^2 \|\omega_i\|^2$ .

Wir setzen das hard threshold von oben allgemein für Frames an. Sei  $(w_i)_{i \in I}$  ein Frame für  $L^2(I)$  mit Schranken  $A, B > 0$  und  $(\tilde{w}_i)_{i \in I}$  der duale Frame. Bezeichne  $F$  den zugehörigen Frame-Operator,  $\tilde{F}^{-1}$  die Pseudoinverse (vgl. Abschnitt 2.2). Wir betrachten den nichtlinearen Schätzer

$$\tilde{X}_F := \sum_{i \in I} \langle X, w_i \rangle S(i) \tilde{w}_i \tag{5.7}$$

$$= \tilde{F}^{-1} \left( (\langle X, w_i \rangle S(i))_{i \in I} \right), \tag{5.8}$$

mit hard threshold  $S$  aus (5.4). Bezeichne

$$M := \{i \in I; |\langle f, \omega_i \rangle| \geq \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\} \quad \text{und} \\ M^c := \{i \in I; |\langle f, \omega_i \rangle| < \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\}.$$

Dann gilt für den punktweisen Fehler

$$\langle f, w_i \rangle - \langle X, w_i \rangle S(i) = \begin{cases} -\langle N, w_i \rangle & \text{falls } i \in M \\ \langle f, w_i \rangle & \text{falls } i \notin M. \end{cases} \tag{5.9}$$

Für die Pseudoinverse gilt  $\|\tilde{F}^{-1}\| \leq \sqrt{A}^{-1}$ . Mit den Abbildungen  $f_{M\mathfrak{c}} : i \mapsto \langle f, w_i \rangle \chi_{M\mathfrak{c}}(i)$  und  $N_M : i \mapsto \langle N, w_i \rangle \chi_M(i)$ ,  $i \in I$ , gilt für den  $L^2$  Fehler des Schätzers  $\tilde{X}$  aus (5.7):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{opt}^{frame} &:= E\left(\|f - \tilde{X}_F\|^2\right) = E\left(\|\tilde{F}^{-1}(Ff - \langle X, w_i \rangle S(i))\|^2\right) \\ &\stackrel{(5.9)}{=} E\left(\|\tilde{F}^{-1}(N_M - f_{M\mathfrak{c}})\|^2\right) \\ &\leq A^{-1} E(\|N_M - f_{M\mathfrak{c}}\|^2) \\ &= A^{-1} \sum_{i \in I} \min\left\{|\langle f, w_i \rangle|^2, \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\right\} \end{aligned}$$

Der optimale Fehler ist also für ONB und Frames von gleicher Bauart.

Betrachten wir wieder den Fehler mit Schwellwertoperator  $S_h$  auf Koeffizienten und den zu (5.6) analogen Schätzer

$$\tilde{Y}_F := \sum_{i \in I} S_h(\langle X, w_i \rangle) \tilde{w}_i. \quad (5.10)$$

Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 5.13 für Frames.

**Satz 5.14 (Nichtstationäre Rauschfilterung in Frames)** Für Schwellwerte  $T_i := \sigma_i \|\omega_i\| \sqrt{2 \ln(|I|)}$  und  $|I| > 3$  gilt für den mittleren Fehler

$$\varepsilon = E(\|f - \tilde{Y}_F\|^2) \leq \frac{A}{B} (2 \ln(|I|) + 1) \left( A^{-1} \tilde{\sigma}^2 + A^{-1} \sum_{i \in I} \min\left\{|\langle f, w_i \rangle|^2, \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\right\} \right) \quad (5.11)$$

Dabei ist  $\tilde{\sigma}^2 := \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2$ .

**BEWEIS** Zu einer Gauß-verteilten Zufallsvariable  $G(\mu, \sigma)$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma$  bezeichne  $\rho_T(\mu, \sigma) := E((S_h(G) - \mu)^2)$ .

Da  $(\omega)_{i \in I}$  ein Frame ist, und mit der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\begin{aligned} E(\|f - \tilde{Y}\|^2) &\leq \frac{1}{B} E\left(\sum_{i \in I} |f_i - \tilde{Y}_i|^2\right) \\ &= \frac{1}{B} \sum_{i \in I} E(\langle f, \omega_i \rangle - S_h(\langle X, \omega_i \rangle))^2 \\ &= \frac{1}{B} \sum_{i \in I} \rho_{T_i}(\langle f, \omega_i \rangle, \sigma_i \|\omega_i\|) \end{aligned}$$

Bezeichne

$$L_T(\mu, \sigma) := \frac{\rho_T(\mu, \sigma)}{\sigma^2 |I|^{-1} + \min(\mu^2, \sigma^2)}.$$

Weiter sei  $\Lambda_T(\sigma) := \sup_{\mu \in \mathbb{R}} L_T(\mu, \sigma)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} E(\|f - \tilde{Y}\|^2) &\leq \frac{1}{B} \sum_{i \in I} L_{T_i}(\mu, \sigma_i \|\omega_i\|) \left( \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2 |I|^{-1} + \min\left(|\langle f, \omega_i \rangle|^2, \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\right) \right) \\ &\leq \frac{1}{B} \left( \sup_{i \in I} \Lambda_{T_i}(\sigma_i \|\omega_i\|) \right) \left( \tilde{\sigma}^2 + \sum_{i \in I} \min\left(|\langle f, \omega_i \rangle|^2, \sigma_i^2 \|\omega_i\|^2\right) \right). \end{aligned}$$

Zum Beweis von Formel (5.11) bleibt also  $\sup_{i \in I} \Lambda_{T_i}(\sigma_i \|\omega_i\|) \leq 2 \ln(|I|) + 1$  zu zeigen, d. h.  $L_T(\mu, \sigma) \leq 2 \ln(|I|) + 1$  für alle  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . Diese Formel hängt nur noch von einer Gauß-verteiltern Zufallsvariable mit beliebigem Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma$  ab, nicht von dem Frame. Im Beweis von [Mal98, Theorem 10.3] wird diese Abschätzung gezeigt. Damit ist auch der Satz bewiesen.  $\square$

Ist der erwartete optimale Fehler in Frames kleiner als in einer ONB? Auf den ersten Blick halten sich in Formel (5.11) die in Frames über eine größere Indexmenge  $I$  laufende Summation und die obere Frameschranke  $B$  die Waage. Offensichtlich muss die Rauschfilterung in Frames nicht zwingend besser sein: Nimmt man die Elemente einer ONB  $\mathcal{W}$  doppelt, so ist dies ein fester Frame mit Schranken  $A = B = 2$ . Die Rauschfilterung in diesem Frame führt aber zu dem der Rauschfilterung in der Basis  $\mathcal{W}$  identischen Ergebnis. In [Dau92, Abschnitt 3.6] wird anhand einer Beispielrechnung gezeigt, dass Rauschen durch Frame-Rekonstruktion im Gegensatz zu einer Basis stärker reduziert wird. Dies erklärt sich durch die bei Frame-Rekonstruktion stattfindende Projektion auf das Bild des Frames. Durch die Schwellwertoperation wird der Bildraum des Frameoperators verlassen. Ein Teil des Rauschens liegt damit im orthogonalen Komplement des Bildes  $\text{Im}(F)$  und wird durch die Pseudoinverse  $\tilde{F}^{-1}$  auf 0 abgebildet. Die das Signal repräsentierenden Wavelet-Koeffizienten bleiben dagegen durch die Schwellwertoperation weitgehend unangetastet, das Signal wird aus einer redundanten Koeffizientenmenge robust rekonstruiert. Es gilt

**Proposition 5.15** [Mal98, Proposition 5.3] *Sei  $(\omega_i)_{i \in I}$  ein Frame mit  $\|\omega_i\| = 1$ , für alle  $i \in I$ .  $F$  bezeichne den zugehörigen Frame-Operator,  $\tilde{F}^{-1}$  die Pseudoinverse. Ist  $N$  weißes Rauschen auf dem Koeffizientenraum  $l^2(I)$  mit Mittelwert 0 und Varianz  $\sigma^2$ , dann gilt für die Projektion  $P := F\tilde{F}^{-1}$  auf das Bild des Frames:*

$$E(|PN|^2) \leq \frac{\sigma^2}{A}.$$

*Für feste Frames gilt die Identität.*

Je redundanter der Frame, je größer also die untere Frameschranke  $A$ , um so robuster ist die Rekonstruktion gegen Rauschen im Koeffizientenraum.

In der Praxis ist die lokale Varianz  $\sigma_i$  des nichtstationären Rauschens  $N$  zu schätzen. In Abschnitt 6.9.1 wird dazu ein lokaler Varianzschätzer vorgestellt und in Beispiel 6.14 eine Anwendung zur Rauschfilterung in Mammographien demonstriert.





# Kapitel 6

## Hervorhebung von Mikroverkalkungen

Untersuchungen haben gezeigt, dass nur etwa 3% der Information, die in einer Mammographie enthalten ist, auch im Lichtkasten sichtbar wird<sup>1</sup>. Dies bedeutet ein großes Potential für Verfahren zur Hervorhebung interessanter Strukturen. In Abschnitt 6.2 wird ein Überblick über Verfahren zur Hervorhebung von Strukturen, insbesondere Mikroverkalkungen, in Mammographien gegeben. Ansätze mit Multiskalenzerlegungen sind hier vorherrschend. Ich fasse in Abschnitt 6.3 verschiedene Wavelet-basierte Methoden zur Rauschfilterung, Kontrastverbesserung und Hervorhebung von Mikroverkalkungen unter dem Begriff der Hervorhebung mit Wavelet-Frames zusammen. In den folgenden Abschnitten analysiere ich Eigenschaften dieser Konstruktion sowie Anforderungen an den verwendeten Frame. Kern des Kapitels sind die praktischen Untersuchungen in Abschnitt 6.9. Hier wird ein modellbasiertes Verfahren zur Hervorhebung mikrokalkförmiger Strukturen entwickelt. Besonders die Arbeiten von A. Laine et al. [LSFH94, LFY95] zur Kontrastverstärkung sowie R. Strickland und H. Hahn [SH96] zur Modellierung mit angepassten Filtern dienen dabei als Grundlage. Wir stützen uns weiter auf das in Abschnitt 5.2 entwickelte Modell für mikrokalkförmige Strukturen. Der Vorteil der integrierten Wavelet-Transformation, wie sie in Kapitel 3 entwickelt wurde, gegenüber anderen Diskretisierungen der Wavelet-Transformation wird besonders herausgestellt.

### 6.1 Problemstellung

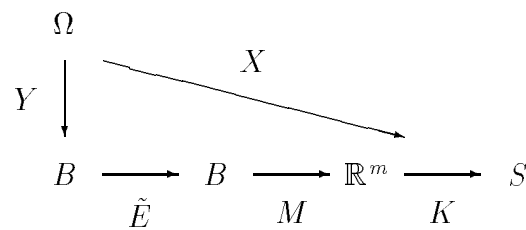
Ziel der Hervorhebung ist, interessante Strukturen in einer Mammographie für den Mediziner besser sichtbar zu machen. Dies geschieht, indem interessante Strukturen in einem Bild gegenüber dem Bildhintergrund hervorgehoben werden. Hier treten zwei vage Begriffe auf: *Interessante Strukturen* und *hervorheben*. Die Qualität der Visualisierung lässt sich

---

<sup>1</sup>Diese Zahl wird in [LSFH94] zitiert aus: I. Brodie und R. A. Gutcheck, *Radiographic information theory and application to mammography*, Med. Phys., vol. 9, 1982.

leider nur partiell objektiv ermitteln, ob ein Bild „gut“ aussieht, hängt stark vom Betrachter ab. Als Ausweg präzisieren wir die Begriffe durch die Einbettung der Hervorhebung in die Problemstellung der Klassifikation, vgl. Abschnitt 5.3.3. Dabei wird Hervorhebung als Vorverarbeitungsschritt für eine darauf folgende Klassifikation betrachtet.

Auf Abbildung 5.8 aufbauend, zeigt Abbildung 6.1 die Hervorhebung als Teilaufgabe bei der Klassifikation. Unter interessanten Strukturen in einem Bild  $b \in B$  wollen wir solche verstehen, die für die Entscheidungsfindung des Klassifikators  $K$  wesentlich sind. Interessante Strukturen in einem Bild sind durch den Merkmalsvektor codiert. Damit möglichst einfache Merkmale verwendet werden können, sollten sich interessante Strukturen in dem Bild deutlich vom Hintergrund unterscheiden. Darin betrachten wir die Aufgabe der Hervorhebung. Anstatt den Merkmalsraum eines existierenden Merkmals  $M$  mit weiteren Komponenten aufzublähen, steckt man Wissen über die interessanten Strukturen in einen Operator  $\tilde{E}$  zur Hervorhebung. Die Qualität der Hervorhebung, also der Hervorhebung interessanter Strukturen, messen wir anhand der Leistung des Klassifikators  $K$ , d. h. wie gut er das Risiko (5.2) minimiert. Steht bei der Konstruktion von Merkmalen  $M$  die Di-



**Abbildung 6.1: Einbettung der Hervorhebung in die Klassifikation.** Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  modellieren Beobachtungen  $B$  von realen Zuständen  $S$ . Für die Zuordnung einer Beobachtung  $b \in B$  zu einem Zustand  $s \in S$  wird zuerst eine Hervorhebung  $\tilde{b} := \tilde{E}(b)$  auf dem Raum der Bilder  $B$  ausgeführt, auf dem Bild ein Merkmalsvektor  $M(\tilde{b})$  berechnet und dessen Wert durch einen Klassifikator  $K$  einem Zustand  $s$  zugeordnet.

mensionsreduktion im Vordergrund, so ist es bei der Konstruktion von  $\tilde{E}$  die Aufbereitung des beobachteten Bildes mit dem Ziel, die Trennschärfe der darauf aufsetzenden Merkmale zu erhöhen. Die vorgestellte Aufgabenteilung ist also nur durch die Herangehensweise an die Problemlösung bestimmt. Man kann auch extreme Positionen annehmen:

- (i) Wähle  $M \circ \tilde{E} := Id$ . In diesem Fall leistet der Klassifikator  $K$  die ganze Arbeit. Vorteil ist der geringe Aufwand bei der Modellierung, da Bayes-Schätzer unabhängig von dem konkreten Problem sind. Durch Lernen anhand der Testdaten minimiert ein Bayes-Schätzer das Risiko. Wesentlicher Nachteil dieser Herangehensweise ist

bei komplizierten Problemstellungen zum einen der Bedarf an einer sehr großen Testmenge und eine damit verbundene lange Lernphase. Weiter muss die Testmenge die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bereits gut approximieren, also repräsentativ sein.

- (ii) Nehmen wir an,  $S := \{0, 1\}$ , z. B. für die Klassen Mikrokalk und kein Mikrokalk. Wähle  $K \circ M = 1$ , falls  $B \neq 0$  und  $K \circ M = 0$  sonst. In diesem Fall wird die Klassifikation bereits durch die Hervorhebung erledigt. Vorteil ist eine nachvollziehbare Entscheidungsfindung durch einen analytisch berechenbaren Operator ohne auf eine Testmenge angewiesen zu sein. Das für die Klassifikation notwendige Wissen wird z. B. anhand eines physikalischen Modells für das Bild gewonnen. Nachteil ist hier, dass der Operator  $\tilde{E}$  dadurch sehr speziell auf das Problem zugeschnitten ist und somit unflexibel und kaum auf andere Problemstellungen übertragbar ist.

## 6.2 Bekannte Ansätze

Wir geben einen kurzen Literatur-Überblick über Ansätze zur Konstruktion eines Operators  $\tilde{E}$  zur Hervorhebung. Dabei gibt es zwei Sichtweisen: Hervorheben der interessanten Strukturen oder Entfernen der uninteressanten. Wir gliedern die Arbeiten in

- (i) Rauschfilterung und
- (ii) Entfernen unwesentlicher Strukturen aus einer Mammographie sowie
- (iii) Kontrastverbesserung auf Radiographien und
- (iv) Hervorhebung von Mikrokalk.

### Rauschfilterung

Ein klassisches Beispiel für Entfernen störender Strukturen ist die Rauschfilterung. Hier haben sich Wavelets für die nichtlineare Regression als hervorragendes Werkzeug erwiesen (vgl. Kapitel 5.4). Wir betrachten hier speziell Methoden zur Rauschfilterung digitalisierter Mammographien.

In den Arbeiten von L. P. Clarke, M. Kallergi et. al [CKQ<sup>+</sup>94, QCKC94, QCZ<sup>+</sup>95] werden hierarchische gewichtete Median-Filter zur Rauschfilterung verwendet. Der Median  $x_{med}$  einer Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  reeller Zahlen ist der Wert zum Index  $n/2$  in der aufsteigend sortierten Menge, bzw. bei gerader Anzahl  $n$  der Mittelwert aus den Werten zum Index  $(n - 1)/2$  und  $(n + 1)/2$ . Er ist das Minimum der Betragsabstände zu den Elementen der Menge:  $x_{med} \in \operatorname{argmin}_x \{\sum_{i=1}^n |x - x_i|\}$ . Für die Rauschfilterung werden nun Median-Filter mit verschiedenen langen Masken und Gewichtung der Elemente hintereinander geschaltet. Vorteil des Ansatzes über Ordnungsstatistikfilter ist eine schnelle und einfache Implementation sowie gute Ergebnisse bei Impulsrauschen (d. h. einzelne Pixel haben

zufällige Werte, unabhängig von der Umgebung). Weiter sind die Filter kantenerhaltend. Von Nachteil ist ein fehlendes Modell, welches die Filtereigenschaften klärt. In [BP96] werden verschiedene Varianten von Median-Filtern an Beispielen verglichen und darauf hingewiesen, dass eine Vielzahl von Parametern von Hand einzustellen ist.

N. Karssemeijer [Kar93] hat eine Methode zur adaptiven Rauschäqualisation entwickelt. Dabei wird die lokale Varianz des Rauschens geschätzt. Er betrachtet dies als wesentlichen Vorverarbeitungsschritt bei der Detektion von Mikroverkalkungen. Eine Variante dieses Ansatzes wird von A. Ohlhoff [Ohl96] zur Rauschfilterung mit lokalem Varianzschätzer in Wavelet-Basen verwendet. Wir kommen in Abschnitt 6.9.1 darauf zurück.

## Entfernen unwesentlicher Strukturen

Anstatt interessante Strukturen hervorzuheben, kann man den Standpunkt auch umkehren und versuchen, uninteressante oder störende Elemente des Bildes zu identifizieren und auszublenden.

In [LBD96] wird z. B. ein Ansatz vorgestellt, bei dem das Ziel ist, gewebeähnliche Strukturen aus der Aufnahme zu entfernen. Gewebeähnliche Kanten mit 1-2mm Länge und schwachem Kontrast werden mit Filtern zur Linienerkennung detektiert und aus dem Bild abgezogen. Das Residuum enthalte Anomalien, also für die Befundung interessante Strukturen.

In [WK98] werden die niederfrequenten Bänder der DWT gelöscht und nur aus den Hochpass-Filtern rekonstruiert. In [HB99, 11.5] wird ein Verfahren von Valatx et. al. zitiert, bei dem der Hintergrund durch bikubische B-Splines approximiert und vom Bild abgezogen wird. Das resultierende Bild enthält Kanten. Diese Ansätze ähneln dem unscharfen Maskieren.

## Kontrastverbesserung von Radiographien

Ein Beispiel für Hervorhebung ist *Kontrastverbesserung (contrast enhancement)* im Sinne von globaler visueller Bildverbesserung. Ziel ist hier, das Bild so aufzubereiten, dass es für das Auge lesbarer ist, z. B. zur Unterstützung des Mediziners, der anhand des Bildes zu diagnostizieren hat. Dabei sollen Regionen mit geringem Kontrast stärker hervorgehoben werden.

Leider gibt es keinen Konsens, wie der intuitive Begriff des Kontrast zu messen ist. Ist das Bild  $f \in B$  zusammengesetzt aus einem Objekt  $o_f$ , dem Vordergrund, und dem Hintergrund  $h_f$ , dann ist ein in der Radiologie übliches Kontrastmaß  $M_C$  definiert durch

$$M_C(f) := \frac{E(o_f) - E(h_f)}{E(f)}, \quad (6.1)$$

wobei  $E$  die Mittelwertbildung bezeichnet und die Grauwerte als nicht negativ vorausgesetzt werden [HK<sup>+</sup>96]. Das Maß ist nach Definition unabhängig vom Grauwertumfang.

Nimmt man als Merkmal die lokale Intensität, so wird in obigem Sinn ein Operator  $\tilde{E}$  gesucht, so dass  $\tilde{E}(f) = o_f$  gilt. Nachteil dieses Kontrastmaßes ist, dass es ohne Vorwissen ( $o_f$  muss bekannt sein!) nicht auf beliebige Bilder anwendbar ist. Weiter liefert es keine lokale Aussage über den Kontrast. Besteht  $o_f$  aus mehreren Objekten, so macht das Kontrastmaß nur eine Aussage über das Mittel.

In [PCSW96] wird adaptive Kontrastverbesserung für Verdichtungsherde in Mammographie mit Hilfe einer Filterbank zu Kantendetektion und morphologische Operationen vorgestellt.

In [LSFH94, LFY95] wird eine adaptive Kontrastverbesserung auf Wavelet-Filterbänken vorgestellt. Diese wird in Abschnitt 6.9.2 ausgeführt.

## Hervorhebung von Mikrokalk

Für die Detektion von Mikrokalk in einer Mammographie ist z. B. die lokale Helligkeit ein einfaches Merkmal. Nimmt man als Klassen Mikrokalk und kein Mikrokalk, so ist das Ziel eine Abbildung  $\tilde{E}$ , die Mikrokalk aufhellt, aber Gewebe und andere Strukturen abdunkelt. Es gibt verschiedene Ansätze für so eine Hervorhebung.

In den Artikeln von L. P. Clarke, M. Kallergi et. al [CKQ<sup>+</sup>94, QCKC94, QCZ<sup>+</sup>95] wird nach einer Rauschfilterung das Hochpassband der ersten Skala einer diskreten Wavelet-Zerlegung (MSA) mit Spline-Wavelets zur manuellen Detektion von Mikrokalk benutzt. Dies ergibt einen Kantendetektor, ist also nicht mikrokalkspezifisch.

In [KPSP97] werden verschiedene gerichtete Sobel-Operatoren verwendet, um Gradientenbilder zu erzeugen. Diese werden abhängig von der lokalen Varianz gewichtet und dann wieder zusammengesetzt. Die Ergebnisse an Phantomen zeigen gute Ergebnisse für pixelgroße Strukturen. Dagegen funktioniert das Verfahren nicht für größere Strukturen. Es werden generell Kanten hervorgehoben, nicht nur Mikrokalk. Als Vorverarbeitungsschritt, wird deshalb eine Artefaktfilterung durchgeführt. Ist die Abweichung eines Pixelwertes von den umgebenden Werten größer als ein Schwellwert, so wird er durch den Mittelwert ersetzt. Der Schwellwert wird manuell gewählt. Anhand von Phantombildern wird die Methode durch Mediziner einer ROC-Analyse (vgl. Abschnitt 5.1) unterzogen. Dabei führt besonders die Artefaktfilterung zu besseren Ergebnissen.

In [YZC<sup>+</sup>96] werden die Koeffizienten einer diskreten Wavelet-Analyse skalenweise gewichtet und dann das Bild rekonstruiert. Die Gewichte der Skalen werden durch überwachtetes Lernen an einer Trainingsmenge bestimmt.

In [LSFH94, LFY95] wird ein Wavelet-basierter Ansatz zu Hervorhebung von Mikrokalk vorgestellt, auf den wir in Abschnitt 6.9.3 detaillierter eingehen.

Die Verfahren basieren alle weitgehend auf den Annahmen, dass Mikrokalk heller als die Umgebung ist und durch Kantefilter detektiert werden kann. Ersteres ist durch die deutliche höhere Dichte von Mikrokalk gegenüber dem umgebenden Gewebe begründet. Strukturen wie Mikrokalk lassen sich zwar durch Kantefilter detektieren, in Beispiel 6.19 zeige ich jedoch, dass mit Hilfe eines angepassten Filters noch bessere Ergebnisse möglich sind.

### 6.3 Hervorhebung mit Frames

Für die mathematische Modellierung der Hervorhebung mit Frames identifizieren wir Bilder mit kontinuierlichen Funktionen  $f \in B := L^2(\mathbb{R}^2)$ . Bei der praktischen Implementation wird  $f \in l^2(\mathbb{Z}^2)$  als diskret abgetastete, kontinuierlich gegebene Funktion verstanden, wobei der Träger von  $f$  in einem rechteckigen Gebiet  $D \subset \mathbb{Z}^2$  liegt. In Abschnitt 6.4.1 wird die Implementation für integrierte Wavelets ausgeführt.

Die Grundannahme ist, dass die Operation von  $\tilde{E}$  auf  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  kompliziert ist. Ein klassischer Ansatz ist, eine invertierbare Transformation  $U : B \rightarrow \mathcal{H}$  in einen anderen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  zu wählen, so dass der Operator

$$E := U \circ \tilde{E} \circ U^{-1}$$

auf  $\mathcal{H}$  einfachere Gestalt hat. Im Idealfall wirkt  $E$  nur durch Multiplikation. So würde ein Faltungsoperator  $\tilde{E}$  durch die Fourier-Transformation  $U = \mathcal{F}$  diagonalisiert.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tilde{E}} & B \\ U \downarrow & & \uparrow U^{-1} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{E} & \mathcal{H} \end{array}$$

Wir wählen als Transformation  $U$  die kontinuierliche Wavelet-Transformation der Euklidischen Gruppe mit Dilatation. Diese zerlegt ein Bild in Anteile zu verschiedenen Skalen und Orientierungen, indiziert durch die der Transformation zugrunde liegende Dilatationsgruppe  $H = \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ . So ein Multiskalen-Ansatz entspricht der Art und Weise, wie auch unser Gehirn visuelle Information verarbeitet, indem es Bildinformation in Anteile auf verschiedenen Skalen und Orientierungen zerlegt [Fie99]. Die diskrete Wavelet-Transformation erzeugt für eine große Klasse von Funktionenräumen eine dünnbesiedelte Darstellung, d. h. nur wenige Koeffizienten haben großen Betrag [Ma198]. Dies lässt darauf hoffen, dass sich der Operator  $E$  auf Wavelet-Koeffizienten durch einfache, elementare Operationen beschreiben lässt. Diesen Operator  $E$  nennen wir im folgenden **Enhancement-Operator**.

Wir rechnen in der Praxis diskret. Als erster Schritt wird der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  als Folgenraum  $\mathcal{H} = l^2(\Gamma)$  über einer diskreten Indexmenge  $\Gamma$  zu einem Frame  $U$  aufgefasst. Der Frame entsteht durch eine Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. Dabei ist die Art der Diskretisierung entscheidend für die Eigenschaften des Wavelet-Frames. Sie bestimmt, welche Eigenschaften der kontinuierlichen Transformation – wie Vertauschungseigenschaft, stetige Invertierbarkeit und Auswahl an Wavelets – sich auf den Frame übertragen. In einem zweiten Schnitt wird dann der zugrunde liegende Raum  $B$  kontinuierlicher Funktionen durch diskrete Funktionen ersetzt.

Sei  $\Gamma := \{\mathbb{Z}^2 \times A \times R\}$  eine diskrete Teilmenge der Euklidischen Gruppe mit Dilatation  $G$ . Obiger Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ist dann  $l^2(\Gamma)$ . Wir verwenden die Notation  $h := (a, \rho)$  und  $g := (b, h) = (b, a, \rho) \in \Gamma$ .

**Algorithmus 6.1 (Hervorhebung in Wavelet-Frames)** Sei  $(\psi_g)_{g \in \Gamma} \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet-Frame,  $U$  der zugehörige Frame-Operator. Der über die Pseudoinverse  $\tilde{U}$  eindeutig definierte duale Frame sei  $(\chi_g)_{g \in \Gamma}$  (vgl. Abschnitt 2.2).

(i) Zerlege  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  in Wavelet-Koeffizienten

$$\mathcal{WT}_\psi f(g) := \langle f, \psi_g \rangle, \quad g \in \Gamma.$$

(ii) Wende auf  $\mathcal{WT}_\psi(f)$  einen Enhancement-Operator  $E : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$  an.

$$\mathcal{WT}_\psi^E f(g) := E(\mathcal{WT}_\psi f(g)), \quad g \in \Gamma.$$

(iii) Rekonstruiere mit dem adjungierten Operator  $\mathcal{WT}^* : l^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ .

$$f^{ergebnis} := \sum_{g \in \Gamma} \mathcal{WT}_\psi^E f(g) \chi_g.$$

Die Komposition der Abbildungen ergibt den Operator  $\tilde{E} := \mathcal{WT}^* \circ E \circ \mathcal{WT}$  auf dem Raum der Bilder  $B$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tilde{E}} & B \\ \mathcal{WT} \downarrow & & \uparrow \mathcal{WT}^* \\ l^2(\Gamma) & \xrightarrow{E} & l^2(\Gamma) \end{array}$$

Die wesentlichen Komponenten der Hervorhebung sind:

(i) **Der Wavelet-Frame  $\mathcal{WT}_\psi$ .** Wir unterscheiden:

a) Das den Frame aufspannende Wavelet  $\psi$ . Es bestimmt den Betrag der Wavelet-Koeffizienten und insbesondere an welchen Stellen lokale Extrema auftreten. Es spielt die Rolle eines an die gesuchte Struktur angepassten Filters. Lokale Extrema in den Wavelet-Koeffizienten sind dann Punkte mit großer Korrelation zwischen Signal und Wavelet.

b) Die Art der Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation. Hier lassen sich die Diskretisierung der Skala sowie die Diskretisierung der Translation und weiterer Operationen wie Rotation getrennt betrachten. Die Diskretisierung sollte im interessanten Skalenbereich möglichst fein sein.

Wir untersuchen die Konstruktion des Wavelet in Abschnitt 6.4 und die Wahl eines für Hervorhebung geeigneten Wavelet-Frame in Abschnitt 6.5.

- (ii) **Der Enhancement-Operator  $E$ .** Seine Gestalt hängt sowohl von dem gewählten Frame, als auch von dem Ziel der Hervorhebung ab. Wir untersuchen die Konstruktion von Enhancement-Operatoren in Abschnitt 6.7.
- (iii) **Die Rekonstruktion  $WT^*$ .** Sie bestimmt wesentlich, wie die Wirkung von  $E$  auf  $f$  aussieht. Da Frames redundant sind, gibt es verschiedene Möglichkeiten der Rekonstruktion, die sich durch die Projektion auf Wavelet-Koeffizienten und damit die Struktur des reproduzierenden Kerns unterscheiden. Wir untersuchen die Wirkung der Rekonstruktion in Abschnitt 6.8.

Die Wirkung der Hervorhebung ergibt sich erst durch das Zusammenspiel aller Komponenten.

## 6.4 Interpretation und Wahl des Wavelets

Es gibt zwei sich ergänzende Interpretationen für die Wavelet-Zerlegung und damit für die Konstruktion eines geeigneten Wavelets. Zum einen als signalangepasste Filterbank, wobei das Wavelet die Rolle des angepassten Filters spielt, zum anderen als diskretisierte Wavelet-Koeffizienten. Diese Interpretationen sind auch Grundlage für die Konstruktion des Enhancement-Operators. Die Auswahl an Wavelets wird zudem durch die gewählte Diskretisierung eingeschränkt.

### 6.4.1 Angepasste Filter

Wir betrachten die Konstruktion eines geeigneten Wavelets als Konstruktion eines an Mikrokalk angepassten Filters. Vergleiche Abschnitt 5.3.1 zur Definition des angepassten Filters. Die Filterbank ist in diesem Fall ein Detektor. Extrema der Wavelet-Koeffizienten können als Punkte hoher Korrelation mit Mikrokalk interpretiert werden. Diese Extrema sollen deshalb präzise lokalisiert werden. Dies führt auf die Forderung nach einer möglichst feinen Diskretisierung. Die Diskretisierung der Filterbank im Translationsparameter ist deshalb äquidistant und mit gleicher Weite wie das Signal zu wählen. Dies garantiert optimale Ortsauflösung. Die Diskretisierung in den Skalen wird an das Mikrokalk-Modell angepasst. Im Fall von Mikrokalkdetektion misst der Skalenparameter  $\mathbb{R}_+^*$  die Größe des Mikrokalks. Durch den Rotationsparameter wird die Ausprägung des Mikrokalks in verschiedene Richtungen bestimmt. Die dem Intervall von 0.05 mm bis 1 mm Durchmesser des Mikrokalks entsprechenden Wavelet-Skalen sollten fein diskretisiert werden.

Betrachten wir die Konstruktion eines an Mikrokalk angepassten Filters  $\psi$ . Dabei ist zum einen die Struktur  $s$  von Mikrokalk zu modellieren, wie in Abschnitt 5.2 geschehen. Weiter wird ein stochastisches Modell  $N$  für den Hintergrund benötigt. Wir betrachten als Hintergrund die Textur des Brustgewebes.

In diesem Abschnitt wird Rauschen durch den Abbildungsvorgang, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben ignoriert. Dieses wird in Abschnitt 6.9.1 zur Rauschfilterung separat betrachtet.



Wir folgen der Argumentation in [SH96]. Ein einfaches Textur-Modell (z. B. in [Jai89]) ist

$$N(t) = m(t) + R(t), \quad t \in \mathbb{R}^2.$$

Dabei bezeichnet  $m$  ein kontinuierliches nichtstationäres Mittel  $m(t) := E(H(t))$  und  $R$  ein stationäres Residuum. Das Mittel  $m$  kann zum Beispiel mit einem Tiefpass-Filter geschätzt und von dem Signal  $X$  abgezogen werden. Wir modellieren  $R$  als ergodische Zufallsvariable mit der Autokovarianz

$$\gamma_R(x_1, x_2) := \sigma_R^2 e^{-\alpha \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zugehörige Spektralverteilungsfunktion lautet

$$P_{RR}(\omega) = 2\sigma_R^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \|\omega\|^2}, \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^2.$$

Mit der Gauß-Funktion  $\varphi$  als Modell für mikrokalkförmige Strukturen lautet das an Mikrokalk angepasste Filter nach Definition 5.3

$$\hat{\psi}(\omega) := \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{P_{RR}(\omega)} = \frac{1}{2\alpha\sigma_R^2} e^{-\|\omega\|^2/2} (\alpha^2 + \|\omega\|^2), \quad \omega \in \widehat{\mathbb{R}}^2.$$

In [SH96] wurden anhand der Nijmegen Mammographie-Bilddatenbank Werte für  $\alpha$  zwischen 0,01 und 0,2 geschätzt. Bei der Arbeit auf hochauflösten Röntgenbildern ist der Wert deutlich größer. Die in [SH96] angenommene Vereinfachung  $\alpha \rightarrow 0$  ist daher nur für in geringer digitaler Auflösung vorliegendes Bildmaterial zu rechtfertigen.

Der Mittelwert von  $\psi$  ist gegeben durch  $\hat{\psi}(0) = \pi\alpha\sigma_R^{-2}$ . Nur für den Fall  $\alpha = 0$  ist die Funktion  $\psi$  zulässig. Dies entspricht einer Approximation  $P_{RR} := \|\omega\|^{-2}$ . Das ist die Autokovarianz eines Brown'schen Prozesses. In diesem Fall gilt

$$\hat{\psi}(\omega) = \sigma_R^{-2} \|\omega\|^2 e^{-\|\omega\|^2/2}. \quad (6.2)$$

Dies entspricht dem in Beispiel 3.14(i) vorgestellten Gauß-Wavelet. Die Konstruktion eines angepassten Filters führt nicht zwingend auf eine zulässige Funktion. Dies ist ein offensichtliches Problem, welches in [SH96] verschwiegen wird.

Eine weitere grundsätzliche Kritik an der Idee, das Wavelet die Rolle eines angepassten Filters spielen zu lassen, ergibt sich aus der Operation der Dilatation. Die Motivation für die Verwendung von Wavelets ist, auf elegante Weise eine Filterbank für Mikrokalk in verschiedener Größe zu generieren. Ist ein angepasstes Filter  $\psi$  für mikrokalkförmige Strukturen einer gewissen Größe konstruiert, so ist eine Skalierung  $D_a\psi$  im allgemeinen kein angepasstes Filter für entsprechend skalierten Mikrokalk. Dies folgt, da die Skalierung nicht nur das Modell  $\varphi$  für das Signal, sondern auch das Modell für den Hintergrund  $P_{RR}$  skaliert:  $D_a\hat{\psi} = \frac{D_a\hat{\varphi}}{D_aP_{RR}}$ . Ein korrekter Ansatz würde nur die signalangepasste Funktion  $s$  skalieren, d. h.  $\hat{\psi}_a := \frac{D_a\hat{\varphi}}{P_{RR}}$ . Die Annahme  $\hat{\psi}_a = D_a\hat{\psi}$  gilt nur in dem Spezialfall, wenn die Spektralverteilungsfunktion  $P_{RR}$  invariant unter Skalierung ist.

Der Ansatz für eine Filterbank aus verschiedenen skalierten angepassten Filtern führt nur zu einem Suchraum für Maxima. Extrema oberhalb eines Schwellwertes werden interpretiert als Detektion des Signales an dieser Position und Skalierung. Aus dem Filter-Ergebnis kann mit dieser Interpretation allein keine weitere Struktur gewonnen werden. Deshalb ist der Ansatz, ein angepasstes Filter zu konstruieren, welches zusätzlich zulässig ist trotz der eben geäußerten Kritik verlockend, denn dann lässt sich die Filter-Bank auch als diskrete Wavelet-Koeffizienten interpretieren. Dies erlaubt insbesondere, die Funktion durch Rekonstruktion zurückzugewinnen. Die Interpretation der Filterbank als Wavelet-Koeffizienten betrachten wir in Abschnitt 6.4.2.

## Ein an mikrokalkförmige Strukturen angepasstes Wavelet

Für die Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation mit Hilfe integrierter Wavelets konstruieren wir eine, durch das an Mikrokalk angepasste Wavelet aus Formel (6.2) erzeugte Filterbank. Seien  $A := (a_j)_{0 \leq j \leq |J|}$  streng monoton fallende positive Werte in  $\mathbb{R}_+^*$ . Diese erzeugen eine Partition der Skalen, indem dem Index  $j$  das Intervall  $[a_{j+1}, a_j]$  zugeordnet wird. Die Wahl einer für Mikrokalk geeigneten Partition  $(a_j)$  der Skala hängt von der Digitalisierung und der geometrischen Auflösung des Bildes ab. Das zu diesem Wavelet gehörende integrierte Wavelet ist rotationsinvariant. Wir verfeinern die Zerlegung durch eine Partition  $(\eta_l)_{l \in L}$  der Rotation, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Die reellen, nichtnegativen Bandpass-Filter lauten nach Formel (3.6) im Fourier-Raum und mit dieser Zerlegung in Richtungsanteile:

$$|\widehat{\Psi}^j(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \left( ((a_j \|\omega\|)^2 + 1) e^{-(a_j \|\omega\|)^2} - ((a_{j+1} \|\omega\|)^2 + 1) e^{-(a_{j+1} \|\omega\|)^2} \right) \eta_l(\arg(\omega)), \quad (6.3)$$

$\omega \in \mathbb{R}^2, j \in J, l \in L$ . Die Randfälle sind der Hochpass

$$|\widehat{\Psi}^0(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - ((a_1 \|\omega\|)^2 + 1) e^{-(a_1 \|\omega\|)^2} \right). \quad (6.4)$$

und der Tiefpass

$$|\widehat{\Psi}^{|J|}(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \left( ((a_{|J|} \|\omega\|)^2 + 1) e^{-(a_{|J|} \|\omega\|)^2} \right). \quad (6.5)$$

Die Filter sind in den Abbildungen 3.1 und 3.4 dargestellt. Der Hochpass existiert nur formal, er ist keine  $L^2$ -Funktion. Die Gewichtung der Filter über Skalen verändert sich. Dies ist bei der Interpretation als angepasster Filter bei dem Vergleich zweier Skalen zu beachten. Dazu müssen die Filter mit den Faktoren aus Satz 3.19 gewichtet werden.

### 6.4.2 Diskretisierte Wavelet-Koeffizienten

Ist das Filter zulässig, kann die Filterbank als diskretisierte Wavelet-Transformation interpretiert werden. Dies ist Grundlage für die Konstruktion eines Enhancement-Operators,

der Eigenschaften der Wavelet-Transformation ausnutzt. Diese Eigenschaften sind ebenso Motivation für in Kapitel 7 untersuchten Merkmale. Dies sind insbesondere:

- (i) **Maxima-Skelett.** Für die dyadische Wavelet-Transformation ist bekannt, dass eine Funktion allein aus dem Maxima-Skelett der Wavelet-Koeffizienten sehr präzise rekonstruiert werden kann [Mal98]. Damit spielen die Extrema der Wavelet-Koeffizienten, genau wie bei der Interpretation der Transformation als angepasstes Filter, eine ausgezeichnete Rolle.

**Definition 6.2** Ein Punkt  $(b_0, a_0) \in G$  heißt **Skalen-Maximum** der Wavelet-Transformierten  $WT_\psi f$ , falls eine Umgebung  $U$  von  $b_0$  existiert, so dass für alle  $b \in U$

$$|WT_\psi f(b, a_0)| \leq |WT_\psi f(b_0, a_0)|$$

gilt und

$$|WT_\psi f(b, a_0)| < |WT_\psi f(b_0, a_0)|$$

für alle  $b \in U$  mit  $b < b_0$  oder alle  $b \in U$  mit  $b > b_0$  gilt. Eine wegzusammenhängende Kurve aus Skalen-Maxima in  $G$  wird auch **Maxima-Kurve** genannt. Die Menge aller Maxima-Kurven heißt **Maxima-Skelett** des Wavelet-Koeffizienten.

Ein Skalen-Maximum ist also ein lokales Maximum auf einer festen Skala, welches einseitig ein striktes lokales Maximum ist.

- (ii) **Dominante Frequenz.** Für geeignete eindimensionale Signale geben die Maxima über Skalen Auskunft über sogenannte instantane Frequenzen in dem Signal  $f$  (*ridge detection*, vgl. [DEG<sup>+</sup>92, GT94, CHT97, CHT99]). Zugrunde liegt der invers proportionale Zusammenhang zwischen Skala und Frequenz.

In der *scale-space* Theorie [Net96, Lin98], ein Vorgänger der Wavelet-Transformation in der Bildverarbeitung, werden ebenfalls Extrema über Skalen betrachtet. Die *scale-space* Zerlegung entspricht der Wavelet-Analyse mit einem Gauß-Wavelet.

- (iii) **Lokale Regularität.** Die Interpretation durch Wavelet-Koeffizienten erlaubt Aussagen über die lokale Regularität des Signales, denn diese ist durch das Abklingverhalten der Koeffizienten entlang Maxima-Linien charakterisiert [Hol95]. Dies wurde auch in Abschnitt 3.7 für Morlet-integrierte Wavelets untersucht. Dabei spielt die Zahl der Momente des Wavelets eine wesentliche Rolle, da sie Zahl und Amplitude der Maxima-Linien bestimmt.

Um bisherige Ansätze zur Hervorhebung zu überbieten, sind für die Konstruktion des Enhancement-Operators sowohl die Interpretation als angepasstes Filter, als auch als Wavelet-Koeffizienten zu verknüpfen. Dies wird in Abschnitt 7.3 demonstriert.

## 6.5 Wahl des Wavelet-Frames

Grundlage bildet die kontinuierliche Wavelet-Transformation der euklidischen Gruppe mit Dilatation. Wir beleuchten Vor- und Nachteile verschiedener Diskretisierungen anhand der für die Anwendung in der Bildanalyse und speziell der Problemstellung der Hervorhebung gestellten Forderungen.

Die Aufgabe der Bildanalyse ist grundsätzlich verschieden von Problemstellungen wie Kompression. Im Vordergrund steht dort eine möglichst kompakte Repräsentation, was auf Basistransformationen wie die diskrete Wavelet-Transformation und Wavelet-Packet Algorithmen führt. Für die Analyse interessiert dagegen die Zerlegung des Signales in gut lokalisierte, aussagekräftige Bausteine. Wir stellen folgende Forderungen an die Diskretisierung.

- (i) **Translationskovarianz.** Für die Bildanalyse ist Translationskovarianz von  $\tilde{E}$  zu fordern, d. h.  $\tilde{E}T_b = T_b\tilde{E}$ , denn das Ergebnis der Hervorhebung soll nicht vom Ursprung des Signales  $f$  abhängen. Dies ist erfüllt, wenn sowohl der Wavelet-Frame  $U$  als auch der Enhancement-Operator  $E$  translationskovariant gewählt werden. Ein Gegenbeispiel ist die Multiskalenanalyse wie in Abbildung 6.2 dargestellt. Einzige translationskovariante Lösung für diskrete Signale ist eine Abtastung mit konstanter Gitterweite über alle Skalen, wie in Lemma 2.13 gezeigt.

Alternativ erhält man eine translationskovariante Transformation, wenn man auf die lokalen Extrema der Transformaten abbildet. Allerdings hängen diese vom Signal ab und sind numerisch schwer zu bestimmen. Damit wird eine Implementation unpraktikabel.

- (ii) **Freie Wahl der Diskretisierung des Dilatationsparameters.** Skalenvarianz wird für geometrische Skalierungen, also im multiplikativen Sinn äquidistante Abtastung, durch geometrische Abtastung der Skalen erreicht. Dies ist offensichtlich zu grob, da Objekte wie Mikroverkalkungen in Bildern in beliebigen Größen auftreten. Deshalb ist eine feinere Auflösung notwendig. Je feiner die Diskretisierung  $A$  der Skala, um so präziser werden auch Maxima-Linien der CWT lokalisiert.
- (iii) **Orientierte Filter.** Für die Hervorhebung gerichteter Strukturen ist der Rotationsparameter wichtig. Verallgemeinerungen für höhere Dimensionen über Tensorprodukte sind nicht ausreichend, falls in einem Punkt mehr als eine Richtung detektiert werden muss. Ein Ansatz über Tensorprodukt erlaubt nur den Gradienten zu schätzen. Kreuzen sich aber z. B. zwei Kanten, so liegt der Gradient zwischen den Kanten, liefert also keine nutzbare Richtungsinformation.

Für die Detektion von Mikroverkalkungen in Mammographien sind z. B. Verkalkungen und Kreuzungen von Gewebestrukturen zu unterscheiden. Dafür wird mehr Richtungsinformation benötigt. In Abschnitt 7.2.3 wird eine Skala-Winkel-Darstellung der kontinuierlichen Transformation vorgestellt, die zeigt, dass sich diese Strukturen in Mammographien mit Hilfe des Rotationsparameters der CWT unterscheiden lassen.

Eine weitere Anwendung aus der medizinischen Bildverarbeitung, bei der dieses Problem ebenfalls auftritt, ist die Subtraktionsangiographie, bei der Blutgefäße abgebildet werden. Um diese zu erkennen, müssen Verzweigungen, also Punkte mit mindestens zwei verschieden ausgeprägten Richtungen, detektiert werden sein.

- (iv) **Auswahl an Wavelets.** Interpretiert man die Rolle des Wavelet als signalangepasstes Filter, so ist wesentlich, dass auch geeignete Wavelets zur Verfügung stehen. Wir fordern also, dass die bei der kontinuierlichen Transformation gegebene Wahlfreiheit durch die Diskretisierung nicht zu stark eingeschränkt wird.
- (v) **Einfache Rekonstruktion.** Für die Rekonstruktion muss der duale Frame bestimmt werden. Dies geht im allgemeinen nur durch iterative Algorithmen, deren Konvergenzordnung von den Frame-Schranken abhängt, wie in Abschnitt 2.2 ausgeführt. Feste Frames erlauben eine einfache Rekonstruktion, da Wavelet und Rekonstruktionswavelet identisch sind. Die Morlet-Rekonstruktion ermöglicht alternativ eine sehr schnelle Rekonstruktion.

Wir untersuchen für die in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Diskretisierungen der kontinuierlichen Wavelet-Transformation, inwieweit sie die geforderten Eigenschaften besitzen:

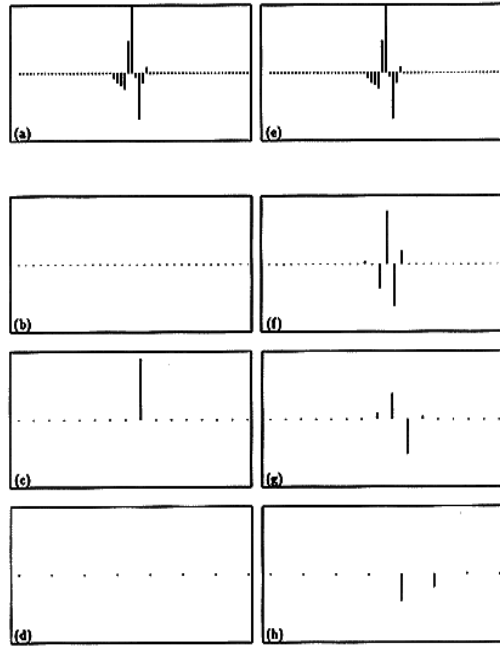
### Multiskalenanalyse (Diskrete Wavelet-Transformation, DWT)

Die Multiskalenanalyse wurde in Abschnitt 2.1 vorgestellt. Die Skala ist dyadisch diskretisiert, in jeder Skala sind die Translationen nach dem Abtasttheorem von Shannon mit der kritischen Abtastrate diskretisiert. Das Ergebnis ist eine redundanzfreie Transformation mit schnellem Algorithmus durch ein Pyramiden-Schema. Die DWT erfüllt keine Translationskovarianz. Vergleiche dazu auch Abbildung 6.2.

**Bemerkung 6.3** Hierzu scheint mir eine generelle Beobachtung angebracht: Das Ergebnis der diskreten Wavelet-Transformation hängt vom Ursprung des Signales ab. Mittelt man über die Wavelet-Transformierte aller Translate eines Bildes, um die Abhängigkeit vom Ursprung zu beseitigen, erhält man die mittlere durch die Transformation erzielte Lokalisierung.

Statt über die Translate des beliebigen Bildes kann genauso über die Translate des Wavelets selbst gemittelt werden. Mittelt man über die Multiskalenanalyse aller Translate  $T_b$ ,  $b = 2^{-j}$ ,  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  eines Wavelets  $\psi \in W_0$  in einer feineren Skala  $V_n$ ,  $n > 0$ , so entsteht eine eher schlecht lokalisierte Wolke. Deshalb verhalten sich bei Anwendung der Multiskalenanalyse in der Signalanalyse verschiedene Wavelets im Mittel sehr ähnlich. Dies hat zu der vorherrschenden Meinung geführt, die spezielle Wahl des Wavelets sei nicht weiter relevant.

Diese Beobachtung gilt aber nicht für translationskovariante Transformationen. Hier fällt der verschmierende Effekt weg, die Koeffizienten sind unabhängig von der Translation gleich gut lokalisiert. Damit ist die Bedeutung der Wahl des Wavelets höher.  $\square$



**Abbildung 6.2: Fehlende Translationskovarianz der Multiskalenanalyse.** Links: Multiskalenanalyse eines Daubechies-Wavelets (a) mit sich selbst als Wavelet auf drei Skalen (b),(c) und (d). Da das Wavelet Element der Basis ist, ist nur ein Koeffizient der Zerlegung ungleich Null. Rechts: Multiskalenanalyse des um 0.5 verschobenen Daubechies-Wavelets. Dieses ist nicht mehr Element der Wavelet-Basis. Sowohl innerhalb der Skala 0, also auch über Skalen hinweg ist die Lokalisierung verloren, der betragsgrößte Koeffizient liegt sogar auf einer falschen Skala. Die Abbildung ist [SFAH92] entnommen.

Die DWT bietet auch keine Freiheit bei der Diskretisierung der Skala. Die Diskretisierung schränkt weiter die Auswahl an Wavelets deutlich ein. Angepasste Filter lassen sich höchstens näherungsweise finden. Die mehrdimensionale Verallgemeinerung über Tensorprodukt erlaubt nur eingeschränkte Richtungsinformation.

Die DWT ist damit für die präzise Bildanalyse für Mikrokalkdetektion nicht geeignet. In diese Kategorie fallen auch andere Basistransformationen wie biorthogonale Wavelets und Wavelet Packets.

### Dyadische Wavelet-Transformation (DyadWT)

Wir betrachten den zweidimensionalen Mallat-Algorithmus mit dyadischer Skala und separablen Wavelets, wie in Kapitel 2.3 eingeführt. Die Translationen sind unabhängig von der Skala äquidistant diskretisiert, die DyadWT ist translationskovariant. Die Skala kann theoretisch flexibel diskretisiert werden. Eine feinere Diskretisierung, wie z. B. durch in-

terpolierende Skalen, führt aber zu dem Problem, dass die Rekonstruktion über den dualen Frame i. a. nur noch iterativ bestimmt werden kann. Ebenso wie bei der DWT kann als Richtungsinformation nur der Gradient bestimmt werden. Die Auswahl an Wavelets ist etwas größer als bei der DWT.

Iterative Algorithmen wie die DyadWT sind bei großen Daten im Nachteil, da für die Berechnung der Skala  $n$  auch alle gröberen Skalen mit berechnet werden müssen. Liegen die für die Aufgabe interessanten Skalen z.B. in den Skalen 4 bis 6 einer Pyramide, so müssen 3 uninteressante Bänder berechnet und für die Rekonstruktion gespeichert werden. Bei der Anwendung auf Mammographien, die ca. 40MB groß sind, ein enormer Speicherverbrauch. Dieser Aufwand entfällt bei einer Diskretisierung, die eine flexible Wahl der Skalen ermöglicht, da man sich dort auf die Berechnung der für das Problem wesentlichen Skalen beschränken kann.

### **Integrierte und Morlet-integrierte Wavelet-Transformation**

Diese wurden in Kapitel 3 definiert. Die Translationen sind unabhängig von der Skala äquidistant diskretisiert. Die integrierte WT bietet eine flexible Diskretisierung von Skalen- und Rotationsparameter bei einfacher Rekonstruktion. Damit ist die größtmögliche Freiheit gegeben. Theoretisch hat man eine große Auswahl an Wavelets, da für bandbeschränkte Wavelets unabhängig von der Diskretisierung immer ein fester Frame entsteht. Ein Problem ist aber die Berechnung expliziter Formeln für die praktische Umsetzung.

Die Morlet-integrierte WT zeichnet sich darüber hinaus durch eine besonders einfache Rekonstruktion durch Summation der Skalen aus. Bei der Morlet-integrierten WT sorgt die einfache Rekonstruktion für praktische Restriktionen an die Gestalt des Wavelets, da Modifikationen der Wavelet-Koeffizienten durch den Enhancement-Operator bei der Rekonstruktion direkt in das Bild übernommen werden. Problematisch ist hier die Entstehung von Artefakten bei der Rekonstruktion, z.B. wenn der Enhancement-Operator nur auf Maxima operiert.

### **Redundante Filterbankansätze**

Es gibt weitere Konstruktionen für feste Frames. Diese basieren auf Abwandlungen des Filterbank-Schemas und nutzen damit die Vorteile eines schnellen Pyramidenalgorithmus. Die zwei prominentesten sind:

- Feste Wavelet-Frames lassen sich durch die Vereinigung mehrerer Wavelet-Basen erzeugen. Aus diesem Ansatz hat N. G. Kingsbury [Kin99] die *dual-tree* Wavelet-Zerlegung (auch Quasi-Wavelet Frames genannt) entwickelt, die aus zwei Wavelet-Basen der DWT zusammengesetzt ist. Die dadurch eingeführte Redundanz ermöglicht näherungsweise Translationskovarianz der Transformation.
- Eine Filterbank für eindimensionale Signale besteht in der Regel aus zwei Filtern, die so gewählt sind, dass sich ein Signal aus den um Faktor 2 sub-gesampelten Fil-

terantworten eindeutig rekonstruieren lässt. Bei der DWT sind dies die Skalierungsfunktion  $\varphi$  und das Wavelet  $\psi$ . Dies erlaubt eine redundanzfreie Signaldarstellung.

Eine redundante Transformation erhält man, indem man einen zusätzlichen Filter  $\psi_2$  hinzufügt. Der entstehende Freiheitsgrad in den Skalierungsgleichungen kann für zusätzliche Bedingungen wie näherungsweise Translationskovarianz genutzt werden. Dieser Ansatz, auch *framelets* genannt, wurde von A. Ron und Z. Shen [RS97, Ron98] wie auch I. W. Selesnik [Sel99] untersucht.

Beide Ansätze weisen eine geringere Redundanz als die dyadische Wavelet-Transformation auf. Während bei der Konstruktion von N. G. Kingsbury die Redundanz der Transformation mit der Dimension wächst, ist sie bei der zweiten Konstruktion beschränkt.

Nachteil dieser Ansätze für die Bildanalyse ist aber, dass die als Wavelet verwendeten Filter unterschiedlich aussehen, also eine Interpretation als Wavelet-Koeffizienten schwer möglich ist. Ebenso ist die Diskretisierung der Skala fest durch das Pyramidenschema vorgegeben.

## Fazit

Die variable Diskretisierung der Skala ist für die präzise Detektion von Mikrokalk besonders vorteilhaft. Damit kann der interessante Skalenbereich fein diskretisiert werden, während uninteressante Intervalle zusammenfasst werden. Deshalb erscheint die integrierte Wavelet-Transformation die für die Aufgabe der Hervorhebung am besten geeignete Diskretisierung zu sein. Wir prüfen diese Vorhersage in Abschnitt 6.9 an Beispielen.

## 6.6 Diskreter Algorithmus

In Kapitel 3 zur integrierten Wavelet-Transformation wurde nur die Diskretisierung der der Wavelet-Transformation zugrunde liegenden Dilatationsgruppe betrachtet. Für die Implementation muss von einer diskret gegebenen Funktion aus  $l^2(\mathbb{Z}_m^2)$  ausgegangen werden. Würde man in der Wavelet-Transformation den Raum  $L^2(\mathbb{R}^2)$  durch den Hilbert-Raum  $l^2(\mathbb{Z}_m^2)$  ersetzen und eine diskrete Wavelet-Transformation definieren, ergäben sich sofort Probleme mit der Dilatation, da nun eine Gruppe  $H$  gefunden werden müsste, die auf  $\mathbb{Z}_m^2$  operiert. Wir gehen einen anderen Weg und nutzen statt dessen die Diskretisierung der kontinuierlichen Transformation durch integrierte Wavelets, wie in Kapitel 3 beschrieben. Damit erhalten wir auch für diskrete Funktionen einen exakten Algorithmus. Das (Morlet-)integrierte Wavelet  $\Psi^{j,l}$  zu  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$  wird dazu durch Abtasten im Fourier-Raum als Funktion aus  $l^2(\mathbb{Z}_m^2)$  aufgefasst.

**Definition 6.4** *Bezeichne  $F$  die Fourier-Transformation auf  $\mathbb{Z}_m^2$ . Die diskrete Morlet-integrierte Wavelet-Transformation  $WT^{dM}$  lautet für  $f \in l^2(\mathbb{Z}_m^2)$  und Morlet-zulässig-*



ges  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$\begin{aligned} WT_{\psi}^{dM} : l^2(\mathbb{Z}_m^2) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}_m^2 \times J \times L) \\ f &\mapsto F^{-1} \left( Ff \cdot \widehat{\Psi^{j,l}} \right) (b), \quad j \in J, l \in L, b \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

**Lemma 6.5** *Für die diskrete Morlet-integrierte Wavelet-Transformation gilt die Rekonstruktion*

$$f(b) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} WT_{\psi}^{dM} f(b, j, l), \quad \forall b \in \mathbb{Z}_m^2. \quad (6.6)$$

**BEWEIS** Dass weiterhin eine exakte Rekonstruktion möglich ist, liegt daran, dass die verwendeten Wavelets  $\Psi^{j,l}$  im Fourier-Raum punktweise eine Partition der Eins bilden. Es gilt nach (3.18) für alle  $\omega \in \mathbb{R}^2$  die Identität  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \widehat{\Psi^{j,l}}(\omega) = 1$ . Dies gilt erst recht für die Teilmenge  $\mathbb{Z}_m^2$  des  $\mathbb{R}^2$ . Insbesondere ist keine zusätzliche Bedingung an  $\psi$  notwendig. Formel (6.6) folgt dann direkt aus der Linearität der (diskreten) Fourier-Transformation  $F$ .  $\square$

### Bemerkungen 6.6

- (a) Es ist zu beachten, dass die abgetasteten diskreten Filter deutlich andere Eigenschaften als die kontinuierlichen haben können, falls die Abtastbedingung verletzt wird. Dies ist insbesondere bei der Wahl der Partition der Skalen zu beachten.
- (b) Es gilt

$$\left\langle f, T_b F^{-1} \widehat{\Psi^{j,l}} \right\rangle = f * \tilde{F}^{-1} \widehat{\Psi^{j,l}}(b) = F^{-1} \left( Ff \cdot \widehat{\Psi^{j,l}} \right) (b), \quad b \in \mathbb{Z}_m^2. \quad (6.7)$$

In Formel (6.7) wird deutlich, dass es sich nicht um die Wavelet-Transformation zu einer diskreten Gruppe handelt. Beim Abtasten entsteht ein Fehler im Zeitbereich, da  $F^{-1} \widehat{\Psi^{j,l}}$  im allgemeinen von der Einschränkung von  $\Psi^{j,l}$  auf  $\mathbb{Z}_m^2$  abweicht. Wir bezahlen die exakte Rekonstruktion also wieder mit approximierten Wavelet-Koeffizienten, vgl. auch Abschnitt 3.5. Dies fällt für die Anwendung in der Mammographie aufgrund der großen Bildmatrizen nicht ins Gewicht.

Analog gilt für die integrierte Wavelet-Transformation die folgende Diskretisierung.

**Definition 6.7** *Die diskrete integrierte Wavelet-Transformation  $WT^{dI}$  lautet für  $f \in l^2(\mathbb{Z}_m^2)$  und zulässiges  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ :*

$$\begin{aligned} WT_{\psi}^{dI} : l^2(\mathbb{Z}_m^2) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}_m^2 \times J \times L) \\ f &\mapsto F^{-1} \left( Ff \cdot \widehat{\Psi^{j,l}} \right) (b), \quad j \in J, l \in L, b \in \mathbb{Z}_m^2. \end{aligned}$$

**Lemma 6.8** Für die diskrete integrierte Wavelet-Transformation gilt die Rekonstruktion

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \left\langle WT_{\psi}^{dI} f(\bullet, j, l), T_x F^{-1} \widehat{\Psi}^{j,l} \right\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^m. \quad (6.8)$$

BEWEIS Nach (3.7) gilt für alle  $\omega \in \mathbb{R}^2$  die Identität  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} |\widehat{\Psi}^{j,l}(\omega)|^2 = 1$ . Dies gilt erst recht für die Teilmenge  $\mathbb{Z}_m^2$  des  $\mathbb{R}^2$ . Formel (6.8) folgt dann aus der Linearität der diskreten Fourier-Transformation  $F$ . Es gilt für  $x \in \mathbb{Z}_m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} \left\langle WT_{\psi}^{dI} f(x, j, l), T_x F^{-1} \widehat{\Psi}^{j,l} \right\rangle_{l^2(\mathbb{Z}_m^2)} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} F^{-1} \left( F f \cdot \widehat{\Psi}^{j,l} \cdot \widehat{\Psi}^{j,l} \right) (x) \\ &= F^{-1} \left( F f \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in L} |\widehat{\Psi}^{j,l}|^2 \right) (x) = f(x) \end{aligned}$$

□

Es stehen somit diskrete Algorithmen zur Berechnung der (Morlet-)integrierten Wavelet-Transformation zur Verfügung.

## 6.7 Der Enhancement-Operator

Dieser Abschnitt zeigt allgemeine Forderungen an die Gestalt von  $E$  auf, welche sich als Einschränkungen aus der Wahl des Wavelet-Frames sowie der Zielstellung der Hervorhebung ergeben. Weiter werden verschiedene Typen von Enhancement-Operatoren unterschieden.

### Forderungen an den Enhancement-Operator

Die Operation von  $E$  führt i. a. aus dem Bild  $\text{Im}(U) \subset l^2(\Gamma)$  der Transformation heraus. Bei der Rekonstruktion geht der im orthogonalen Komplement von  $\text{Im}(U)$  liegende Teil der Operation verloren. Je besser  $E$  innerhalb des Bildes operiert, um so eher lassen sich verschiedene Enhancement-Operatoren hintereinander schalten. Die gilt insbesondere für die Rauschfilterung. Deshalb interessieren Enhancement-Operatoren, die innerhalb  $\text{Im}(U)$  operieren.

Leider steht das Ziel, den Operator  $E$  lokal zu definieren, im Widerspruch zu dieser Forderung. Aus Satz 1.21 folgt, dass eine Operation innerhalb  $\text{Im}(U)$  zwingend erfordert, die Koeffizienten auf einer nichtkompakten Menge zu ändern. Oder anders formuliert: Wird ein einzelner Wert des Wavelet-Koeffizienten modifiziert, impliziert dies, dass bei Projektion von  $l^2(\Gamma)$  auf  $\text{Im}(U)$  eine nichtkompakte Menge an Koeffizienten geändert wird. Deshalb schwächen wir die Forderung ab. Es sollten zumindest die folgenden notwendigen Kriterien erfüllt sein:

## Bedingungen des Wavelet-Frames an $E$

- (i) **Stetiges Bild.** Wavelet-Koeffizienten  $WT_\psi f$  sind stetig in  $G$  und, abhängig vom Wavelet, bis zu einer gewissen Ordnung differenzierbar. Daraus folgt, dass das Bild von  $E$  zumindest stetig sein soll. Analog sollte der Grad der Differenzierbarkeit des Bildes unter  $E$  dem des Wavelets  $\psi$  entsprechen. Diese Stetigkeit wird bei Operation auf Frame-Koeffizienten  $U_g, g \in \Gamma$  allerdings nur diskret wiedergegeben. Eine geeignete Bedingung an  $E$  ist, dass sich der Operator  $E : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$  zu einem Operator  $E' : L^2(G) \rightarrow \mathbb{C}(G) \cap L^2(\Gamma)$  fortsetzen lässt. Dies ist z. B. der Fall, wenn  $E$  eine stetige Punktoperation ist.

Ein experimentelles Argument für diese Forderung ist z. B. das bessere Abschneiden des *soft-threshold* Verfahrens (stetiges Bild) gegenüber dem *hard-threshold* Verfahren (unstetiges Bild) bei der Rauschfilterung in redundanten Wavelet-Frames.

- (ii) **Antisymmetrie.** Wavelet-Skalen haben verschwindenden Mittelwert. Nimmt man an, dass das Histogramm der Wavelet-Koeffizienten einer Skala symmetrisch um Null ist, so wird diese Eigenschaft durch Antisymmetrie der Operatoren  $E_j$  erhalten.

Diese Annahme wird von S. Mallat für Bilder mit Naturaufnahmen gemacht und durch Experimente, z. B. von [Wou98], begründet. Diese zeigen, dass sich das Histogramm der Wavelet-Koeffizienten auf einer Skala sehr gut durch Familien verallgemeinerter Gauß-Funktionen der Art  $h(u) = Ke^{-(|u|/\alpha)^\beta}$  approximieren lässt.

- (iii) **Invariante Phase.** Sind die Wavelet-Koeffizienten komplexwertig, so ist eine Operation von  $E$  nur auf dem Betrag vorteilhaft, um Artefakte bei der Rekonstruktion zu vermeiden. Der Betrag der Wavelet-Koeffizienten codiert nur die Intensität, während in der Phase auch die Form und Lokalisierung des Wavelets codiert sind.

## Ziel der Hervorhebung und die Wahl von $E$

Wie ist  $E$  zu wählen, um für die Hervorhebung von Strukturen geeignet zu sein? Typisch in der Bildverarbeitung sind Invarianzbedingungen, die ein Verfahren robuster gegen fehlende Normierung der Bilddaten machen. Wir interessieren uns speziell für Hervorhebung von Mikrokalk. Resultierende Forderungen an  $\tilde{E}$  sind:

- (i) **Translationskovarianz.** Wie oben bereits für den Frame gefordert, muß  $E$  translationskovariant sein, damit das Ergebnis der Hervorhebung nicht vom Ursprung des Signales  $f$  abhängt.
- (ii) **Homogenität.** Das Ergebnis soll nicht von der Normierung des Bildes abhängen, es muß also gelten  $E(lx) = lE(x)$ , für alle  $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dies betrifft insbesondere Schwellwertoperationen.
- (iii) **Keine Artefakte einführen.** Ziel der Hervorhebung ist in unserem Fall, Mikrokalk sichtbar zu machen. Damit das Bild weiterhin interpretierbar bleibt, sollen keine

neuen Strukturen (Artefakte) entstehen, was auf die Forderung nach Monotonie der Operation von  $\tilde{E}$  auf dem Bild führt.

Eine sinnvolle Forderung an  $E$  ist hier Monotonie. In diesem Fall erhält  $E$  das Maxima-Skelett des Wavelet-Koeffizienten (vgl. Definition 6.2), welches die Funktion lokal charakterisiert. Allerdings ist das nur eine Motivation, da auch eine monotone Änderung des Betrages der Wavelet-Koeffizienten nach Rekonstruktion theoretisch beliebige Effekte hervorrufen kann. (Die Rekonstruktion von  $f$  ist eine Summe von Koeffizienten, Monotonie von  $E$  zieht sich nicht durch die Summation.)

Ebenso soll durch  $E$  Rauschen nicht verstärkt werden. Dies betrifft vor allem kleine Wavelet-Koeffizienten. Ein Verfahren zur Rauschfilterung legt den Operator  $E$  für kleine Wavelet-Koeffizienten fest. Man kann dies auch als Komposition einer Rauschfilterung auf Wavelet-Koeffizienten mit darauf folgender Hervorhebung betrachten.

- (iv) **Keine Strukturen entfernen.** Das Hervorheben soll nicht auf Kosten anderer Strukturen stattfinden. So sollen z. B. in einer Mammographie Kanten und lokale Extrema erhalten bleiben. Analog obiger Argumentation kann daraus die Forderung nach strenger Monotonie von  $E$  durch ein Erhalten des Maxima-Skeletts motiviert werden.

## Arten von Enhancement-Operatoren

Wir unterscheiden verschiedene Arten von Enhancement-Operatoren abhängig von ihrer Komplexität.

### Skalenweise Operation

**Definition 6.9** *Wir nennen  $E$  skalenweiser Enhancement-Operator, falls*

$$E := (E_a)_{a \in A}, \text{ wobei } E_a : l^2(\mathbb{Z}^2 \times R) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2 \times R)$$

Es wird jeweils nur Information innerhalb einer Skala  $a \in A$  genutzt. Bei Skalen variabler relativer Breite  $a_j/a_{j+1}$ , wie bei der integrierten Wavelet-Transformation der Fall, sind die Skalen vor Anwendung des Enhancement-Operators geeignet zu normieren, wie in Abschnitt 3.2.1 ausgeführt.

Diese Herangehensweise ist dadurch motiviert, dass die Koeffizienten zu jeder Skala wieder als Bild aufgefasst werden können. Damit lassen sich aus der klassischen Bildverarbeitung bekannte Operatoren auf die Skalen übertragen. Die Forderung nach Translationskovarianz des Enhancement-Operators kann so leicht erfüllt werden.

Typische Vertreter translationskovarianter Operatoren sind Punktoperation und lokale Operation. Ein Operator  $E$  ist eine **Punktoperation** auf  $l^2(\Gamma)$ , falls  $E := (E')_{j \in \Gamma}$  mit  $E' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Eine Punktoperation berücksichtigt keine Nachbarschaften, gleiche Grauwerte werden auf gleiche Bildwerte abgebildet. Dies ist die einfachste Art eines nichtlinearen Operators. Ein Beispiel für einen skalenweisen Enhancement-Operator, der innerhalb

einer Skala eine Punktoperation ist, ist die in Abschnitt 6.9.2 untersuchte parametrische Kontrastverbesserung.

Punktoperationen berücksichtigen keine Nachbarschaften und erlauben daher keine an die umgebende Struktur angepasste Operation. Dies leistet ein **lokaler Operator**, der auf einer Nachbarschaft definiert ist und ebenfalls translationskovariant ist. Beispiele für eine lokale skalenweise Operation sind die in Abschnitt 6.9.1 vorgestellte Rauschfilterung sowie die in Abschnitt 6.9.3 untersuchte Spot-Hervorhebung.

Bei skalenweiser Operation tritt das Problem auf, dass die Gewichtung der Operatoren  $E_a$  ungünstig sein kann und die Hervorhebung in einer Skala  $a_0$  ungewollt alle anderen Skalen  $A \setminus \{a_0\}$  dominiert. Dieses Problem tritt deutlich bei den Beispielen der parametrischen Kontrastverbesserung sowie der Spot-Hervorhebung auf.

### Skalenübergreifende Operation

Wesentlich für die Interpretation der Wavelet-Koeffizienten ist der Zusammenhang über Skalen, wie in Abschnitt 6.4.2 ausgeführt. Die Vorteile dieser Interpretation, z.B. die Abklingordnung entlang der Skalen, kann bei skalenweiser Operation nicht ausgenutzt werden.

Wir entwickeln in Abschnitt 7.3 des nächsten Kapitels einen Operator zur Hervorhebung von Mikrokalk, der skalenübergreifende Information ausnutzt.

## 6.8 Rekonstruktion

Bei einer Basistransformation wie der diskreten Wavelet-Transformation bewirken Änderungen der Wavelet-Koeffizienten, wie z.B. Schwellwert-Operationen, direkte Resultate auf der Funktion  $f$ , da die Transformation bijektiv auf den zugehörigen Räumen ist. Bei redundanten Frames dagegen ist  $\text{Im}(U)$  ein echter Teilraum von  $l^2(\Gamma)$ , vgl. Abschnitt 2.2. Wir verlassen durch den Operator  $E : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$  also i. a. den Bildraum der Transformation. Bei einer Rekonstruktion durch Orthogonalprojektion geht der auf  $\text{Im}(U)^\perp$  operierende Anteil von  $E$  verloren. Im ungünstigsten Fall wird die Wirkung von  $E$  komplett von der Projektion geschluckt.

Für die Rekonstruktion besteht gewisse Wahlfreiheit, da die Zerlegung redundant ist. Andere Rekonstruktionswavelets als das duale Wavelet zu benutzen bedeutet, dass die Operation von  $E$  auf  $\text{Im}(U)^\perp$  in die rekonstruierte Funktion eingeht. In jedem Fall besteht Interesse an einer interpretierbaren Rekonstruktion, um die Wirkung des Enhancement-Operators vorhersagen zu können. Wir betrachten speziell drei Rekonstruktionen.

- (i) **Frame-Rekonstruktion.** Hier wird für die Rekonstruktion der, in Abschnitt 2.2 eingeführte, duale Frame  $\tilde{\varphi}$  verwendet.

Die Rekonstruktion mit dem dualen Frame entspricht der Komposition der Orthogonalprojektion  $P : l^2(\Gamma) \rightarrow \text{Im}(U)$  mit der Inversen von  $U$  auf  $\text{Im}(U)$ . Die Orthogonalprojektion von  $l^2(\Gamma)$  auf das Bild  $\text{Im}(U)$  des Frames  $(\varphi_j)_{j \in \Gamma}$  ist nach Prop. 2.10

gegeben durch den Operator  $P : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,

$$Px(n) := U\tilde{U}^{-1}x(n) = \sum_{p \in \Gamma} x(p) \langle \tilde{\varphi}_p, \varphi_n \rangle.$$

Es gilt:

**Lemma 6.10** *Sei  $F := \delta_{g_0} \in L^2(\Gamma)$  für ein  $g_0 \in \Gamma$  in einem festen Frame. Dann hat  $P(F)$  in  $g_0$  ein globales Maximum.*

BEWEIS Der Beweis folgt aus der Projektion in Frames (2.5) und der Cauchy-Ungleichung  $\langle \psi, \mathcal{U}_g \psi \rangle < \|\psi\|_2^2$  für alle  $g \neq 1_G$ .  $\square$

Dieser einfache Zusammenhang motiviert die lokale Definition von Enhancement-Operatoren auf Frames.

- (ii) **Morlet-Rekonstruktion.** Die Voraussetzung der Morlet-Zulässigkeit an das Wavelet erlaubt nach Abschnitt 3.4 die diskrete Rekonstruktion durch Summation der Skalen

$$f(b) = \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \mathcal{WT}_\psi f(b, j, l), \quad b \in \mathbb{Z}^m.$$

Wesentlicher Vorteil ist die im Gegensatz zu Faltungen extrem schnelle Berechnung durch Addition der Skalen. Die Summation geschieht punktweise für  $b \in \mathbb{Z}^m$ . Damit ist die Hervorhebung auf jeder Skala gleichwertig. Die Modifikation von Wavelet-Koeffizienten lässt sich bei dieser Rekonstruktion daher einfach interpretieren. Ein Nachteil gegenüber einer klassischen Rekonstruktion durch den adjungierten Operator ist die fehlende Glättung. Durch einen Enhancement-Operator mit unstetigem Bild erzeugte Artefakte werden in das Bild übertragen.

- (iii) **Rekonstruktion aus Extrema.** Diese Rekonstruktion von S. Mallat und S. Zhong [MZ92] sei als Alternative kurz zitiert. Sie nutzt für die Rekonstruktion nur das Maxima-Skelett der Wavelet-Koeffizienten, wie in 6.2 definiert. Durch alternierende Projektionen zwischen dem Raum  $\mathcal{WT}(L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(\Gamma)$  der dyadischen Wavelet-Transformierten und dem Raum der Funktionen in  $L^2(\Gamma)$ , deren Maxima mit denen von  $\mathcal{WT}(f)$  übereinstimmen, wird das Signal  $f$  näherungsweise rekonstruiert. Dabei liegt der Rekonstruktionsfehler im Bereich der Rechengenauigkeit.

Diese Rekonstruktion ist interessant, da sie erlaubt, sich bei der Definition des Enhancement-Operators auf das Maxima-Skelett zurückzuziehen. Ein Nachteil ist die aufwendige, iterative Berechnung.

## 6.9 Beispiele

Im folgenden werden verschiedene Enhancement-Operatoren diskutiert. In Abschnitt 6.9.1 wird ein Operator für die adaptive Rauschfilterung vorgestellt. Neu ist dabei die Anwendung auf Morlet-integrierte Wavelet-Koeffizienten. Es folgt in Abschnitt 6.9.2 die parametrische Kontrastverbesserung. Dies ist ein Beispiel für einen skalenweisen Punktoperator. Die in Abschnitt 6.9.3 behandelte Spot-Hervorhebung verfeinert diesen Ansatz um Richtungsinformation.

Nach den theoretischen Überlegungen in Abschnitt 6.5 erlaubt die integrierte Wavelet-Transformation die für die Hervorhebung von Mikrokalk optimale Diskretisierung. Diese Vorhersage wird anhand von Beispielen überprüft.

Keiner der in diesem Abschnitt behandelten Operatoren nutzt skalenübergreifende Information. In Kapitel 7 werden skalenübergreifende Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten untersucht. Erst daran anschließend wird in Abschnitt 7.3 ein neuer, auf diesen Ergebnissen sowie der Spot-Hervorhebung aufbauender Operator zur Hervorhebung mikrokalkförmiger Strukturen konstruiert.

Im folgenden sei  $n > 0$  und das Bild als Funktion auf  $\mathbb{Z}_n^2$  gegeben. Die Indexmenge des Frames sei  $\Gamma := \mathbb{Z}_n^2 \times J \times L$  mit  $b \in \mathbb{Z}_n^2$ ,  $j \in J := \{0, 1, \dots, j_{max}\}$ ,  $l \in L$ . Die Wavelet-Koeffizienten lauten  $WT_\psi f(b, j, l)$ . Für die Abbildungen wurde  $n = 256$  oder  $n = 512$  gewählt. Für die Beispiele ist  $j_{max} = 4$ , d. h. es gibt einen Tiefpassfilter  $j = 0$ , drei Bandpass- und einen Hochpassfilter  $j = j_{max}$ . Bei der dyadischen Wavelet-Transformation gibt es zwei Richtungsfilter  $L = \{l_x, l_y\}$ . Für die (Morlet-)integrierte Transformation werden für die Spot-Hervorhebung in Abschnitt 6.9.3 ebenfalls zwei Richtungsfilter verwendet, für Rauschfilterung und parametrische Kontrastverbesserung werden isotrope Wavelets benutzt.

### 6.9.1 Rauschfilterung

Mammographien haben einen hohen Rauschanteil. Die Quellen für Rauschen in Mammographien wurden in Abschnitt 5.1 zusammengestellt. Die Rauschfilterung ist ein wichtiger Vorverarbeitungsschritt für die Hervorhebung mikrokalkförmiger Strukturen in Mammographien. Dies wird später in Beispiel 6.22 demonstriert.

Ein klassisches Wavelet-basiertes Verfahren zur Rauschfilterung ist eine Schwellwertoperation auf den Koeffizienten einer Multiskalenanalyse, wie in Abschnitt 5.4 vorgestellt. Die im folgenden vorgestellte Rauschfilterung operiert dagegen auf Wavelet-Koeffizienten der dyadischen bzw. Morlet-integrierten Transformation, also auf redundanten Frames. Grundlage bilden die in Abschnitt 5.4.3 auf Frames übertragenen theoretischen Resultate zur Rauschfilterung.

Die Rauschfilterung in Frames bietet zwei Vorteile: Zum einen zeigen wir, dass sich auf redundanten Frames gegenüber Wavelet-Basen deutlich bessere Resultate erzielen lassen. Zum anderen werden wir später die (Morlet-)integrierte Transformation für die Hervorhebung von Mikrokalk verwenden. Da diese Transformation sich, wie wir hier zeigen,

auch für Rauschfilterung eignet, ist es möglich, Rauschfilterung und Hervorhebung im Wavelet-Raum direkt hintereinander auszuführen. Dies erspart, im Gegensatz zu zwei separaten Schritten, die Wavelet-Rekonstruktion nach der Rauschfilterung und die folgende Wavelet-Zerlegung vor Anwendung des Operators zur Hervorhebung.

Wir gehen von der Annahme aus, dem Signal  $s$  ist additiv weißes Gauß-verteilt Rauschen  $N$  mit variabler Varianz  $(\sigma_b)_{b \in \mathbb{Z}_n^2}$  überlagert, also

$$f = s + N.$$

Dies entspricht nicht dem physikalischen Modell des Poisson-verteliten Quantenrauschen in Röntgenaufnahmen. Da sich jedoch, wie in Abschnitt 5.1 ausgeführt, verschiedene Quellen für Rauschen überlagern, ist dies eine akzeptable Vereinfachung.

**Definition 6.11** Sei  $d_T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$d_T(x)(b, j, l) := \begin{cases} x - T & \text{falls } x > T, \\ 0 & \text{falls } x \leq T. \end{cases}$$

Als **lokale Rauschfilterung mit soft-threshold** bezeichnen wir den Operator  $D : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,

$$D(F)(b, j, l) := \arg(F(b, j, l))d_{T_{b,j,l}}(\|F(b, j, l)\|),$$

wobei  $F \in l^2(\Gamma)$  und  $(b, j, l) \in \Gamma$ . Die Schwellwerte sind definiert als

$$T_{b,j,l} := 3\sigma_{b,j,l}. \tag{6.9}$$

Sei  $F = \mathcal{WT}_\psi f$ . Dann bezeichne  $\sigma_{b,j,l}$  die Standardabweichung des Rauschens im Koeffizienten  $\mathcal{WT}_\psi f$  in  $(b, j, l)$ .

Die lokale Rauschfilterung mit soft-threshold ist ein Beispiel für einen skalenweisen lokalen Enhancement-Operator. Betragskleine Koeffizienten werden abhängig von einem Schwellwert  $T_{b,j,l}$  gelöscht. Die restlichen Koeffizienten werden um den Betrag des Schwellwertes  $T_{b,j,l}$  verringert. Damit ist das Bild  $D(F)$  stetiger Funktionen  $F$  selbst stetig, wie in Abschnitt 6.7 gefordert. Dies ist auch der Grund, warum das *hard-threshold*, welches ein unstetiges Bild produziert, nicht betrachtet wird.

$D$  ist aufgrund der Operation auf Funktionswerten translationskovariant und aufgrund der funktionsabhängigen Definition der Schwellwerte in (6.9) homogen, d. h. unabhängig von der Normierung des Bildes. Da  $D$  antisymmetrisch ist, wird der Mittelwert der Wavelet-Koeffizienten näherungsweise erhalten.

Der nach Satz 5.14 für optimale Rauschfilterung theoretisch optimale Schwellwert ist  $T_{b,j,l} := \sqrt{2 \ln n^2} \sigma_{b,j,l}$ . Jedoch geht dabei auch ein großer Anteil des Signales verloren. Der kleinere Faktor 3 hat sich durch Experimente als für die Praxis geeignet eingebürgert [Mal98]. Wir übernehmen diese Heuristik für redundante Wavelet-Frames.



## Bemerkungen 6.12

- (a) **Berechnung der Varianz in den Wavelet-Skalen.** Da wir mit einem redundanten Wavelet-Frame rechnen, ist das Rauschen in den Wavelet-Skalen korreliert. Sei das Rauschen  $N$  schwach stationär mit Varianz  $\sigma^2$ .

Die Wavelet-Skala wird als Faltungsprodukt des Signales  $f$  mit dem Wavelet berechnet,

$$\mathcal{WT}_\psi f(b, j, l) = (s + N) * \widetilde{\Psi}^{j,l}(b) = \mathcal{WT}_{\psi,s}(b, j, l) + N_{j,l},$$

mit dem Rauschanteil  $N_{j,l} := N * \widetilde{\Psi}^{j,l}$  in der Skala  $(j, l)$ . Für schwach stationäres Rauschen  $N$  multiplizieren sich die Varianzen, es folgt

$$\sigma_{b,j,l}^2 = \|\Psi^{j,l}\|_{l^2(\mathbb{Z}_n^2)}^2 \cdot \sigma^2.$$

Es ist also die Varianz in jeder Skala mit der Norm  $\|\Psi^{j,l}\|_{l^2(\mathbb{Z}_n^2)}$  des abgetasteten Filters aus Abschnitt 6.6 zu gewichten.

- (b) **Schätzen der lokalen Varianz.** Bei Mammographien ist der Rauschanteil nicht-stationär. Die Varianz  $\sigma_b^2$  des Rauschens  $N$  ist i. a. nicht bekannt und muss geschätzt werden. Dazu kann ein lokaler Varianzschätzer verwendet werden. Für die Berechnung der Abbildungen zu Beispiel 6.14 wurde folgender einfacher Schätzer verwendet, bei dem die lokale Varianz  $\sigma_{b,j,l}$  des Rauschens direkt in den Wavelet-Skalen geschätzt wird. Sei  $U(b)$  eine punktierte Umgebung von  $b \in \mathbb{Z}_n^2$ . Im folgenden Beispiel wird dazu eine  $5 \times 5$  Nachbarschaft gewählt. Der lokale Kontrast einer Funktion  $f$  auf  $\mathbb{Z}_n^2$  ist definiert durch

$$C(b) := f(b) - \frac{1}{|U|} \sum_{b' \in U} f(b').$$

Sei  $f := \mathcal{WT}(\cdot, j, l)$ . Dann ergibt sich folgender Schätzer für die Varianz in Skala  $j, l$ :

$$\hat{\sigma}_{b,j,l}^2 := \frac{1}{|M|} \sum_{b' \in M} C(b')^2,$$

wobei  $M$  eine Nachbarschaft von  $b$  ist. Diese Nachbarschaft sollte dem Träger des Wavelets auf der Skala entsprechen. Für das folgende Beispiel mit Gauß-Wavelets wird eine  $s_j \times s_j$ -Umgebung gewählt, mit  $s_j$  dem Doppelten der Varianz des Gauß-Wavelets auf der Skala. Es gibt auf Heuristiken beruhende Varianten dieses Ansatzes, vgl. [Kar93, Ohl96], die Varianz des Rauschens zu schätzen.

- (c) **Kennlinie.** Die Varianz des Rauschens hängt bei Mammographien stark von der Signalintensität ab, wie von N. Karssemeijer [Kar93] ausführlich untersucht. Anhand einer Kalibrierungsaufnahme kann mit obigem Schätzer eine Kennlinie berechnet werden, welche Grauwerten die geschätzte Varianz der Rauschens zuweist. Dies erspart die fehleranfällige und zeitraubende Schätzung der Varianz in dem jeweiligen

Bild. Grundlage für so ein Vorgehen ist ein normierter Bildbestand, d. h. die Annahme, dass die Kennlinie auf alle Bilder zutrifft. Für die von N. Karsemeijer zusammengestellte Nijmegen Mammographie-Bilddatenbank sind die dafür notwendigen Daten verfügbar.

**Beispiel 6.13 (Vergleich verschiedener Wavelet-Frames)** Abbildung 6.3 zeigt die Rauschfilterung an einem Testbild  $f$  (Bild 6.3(a)), dem weißes, Gauß-verteilt Rauschen  $N$  bekannter Varianz  $\sigma_N^2$  überlagert ist (Bild 6.3(b)). Es wird die Rauschfilterung mit diskreter, dyadischer und Morlet-integrierter Transformation verglichen. Zur Definition der Algorithmen siehe die Abschnitte 2.1, 2.3.3 und 6.6. Für die diskrete Transformation wird ein Daubechies-4 Wavelet verwendet, für die dyadische ein Spline-Wavelet erster Ordnung und für die Morlet-integrierte Transformation ein Gauß-Wavelet. Die Wahl des Wavelets spielt für die beobachteten Unterschiede eine untergeordnete Rolle. Die zu der Abbildung gehörenden Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Durch *soft-threshold* schrumpfen alle Wavelet-Koeffizienten, was der durchweg kleinere Mittelwert  $\mu$  zeigt. Um trotzdem vergleichbare Werte für die SNR zu erhalten, wurden die rauschgefilterten Bilder jeweils normiert. Alle Transformationen führen auf ein deut-

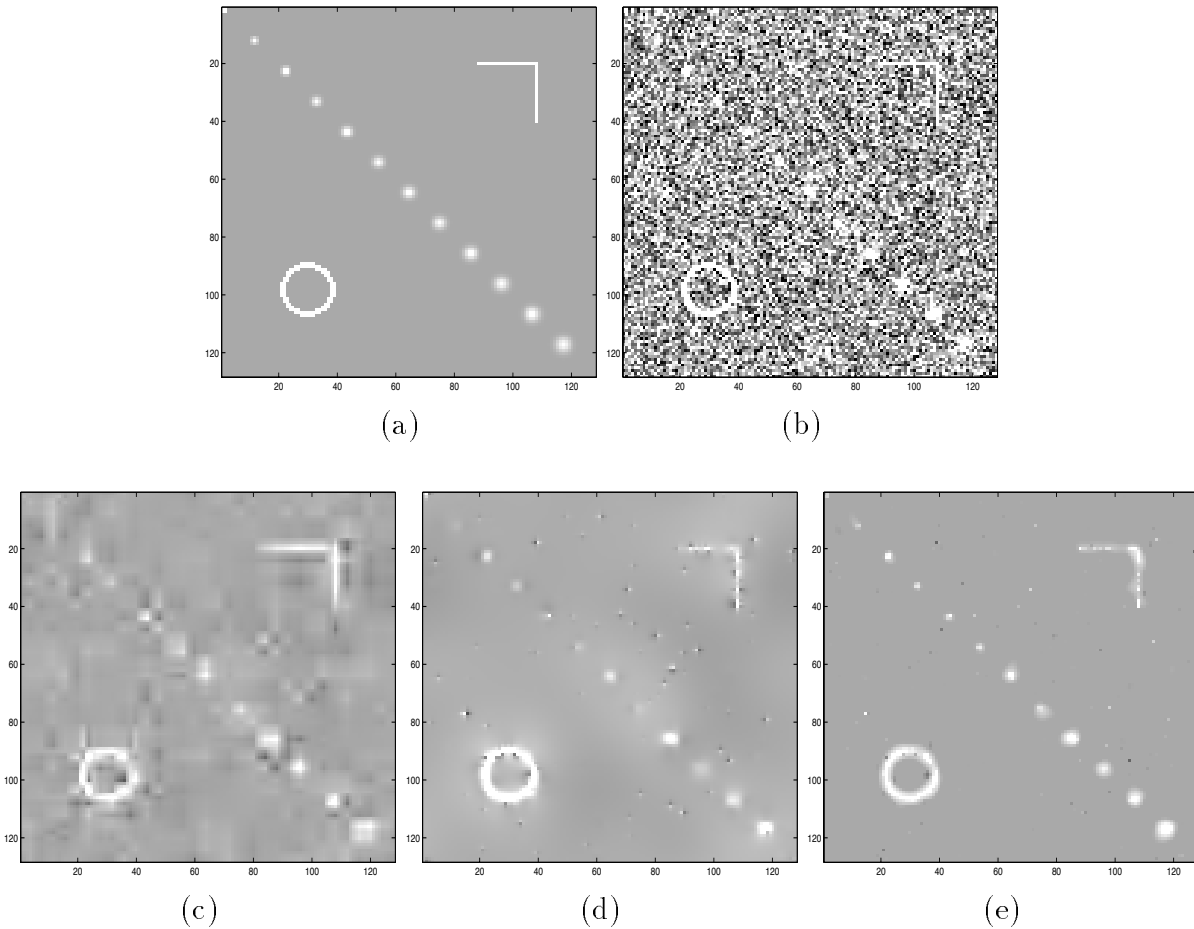
	$\mu$	$\sigma$	SNR
Original $f$	0,0533	0,3586	$\infty$
Rauschen $N$	-0,0070	1,0011	0
Signal $s = f + N$	0,0463	1,0674	0,3582
Diskrete WT	0,0513	0,1734	2,7536
Dyadische WT	0,0232	0,1740	2,8410
Morlet-integ. WT	0,0184	0,1408	4,2866

**Tabelle 6.1: Ergebnisse zur Rauschfilterung.** Dargestellt sind Mittelwert  $\mu$ , Varianz  $\sigma$  und das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR, vgl. Definition 5.2) für die in Abbildung 6.3 dargestellten Bilder. Um vergleichbare Zahlen für die SNR zu erhalten, wurden die rauschgefilterten Bilder jeweils normiert. Die SNR wird berechnet aus  $\frac{\sigma(D(s))}{\sigma(D(s)-f)}$ .

lich besseres Signal-Rausch-Verhältnis mit Verbesserungen um Faktor 7 bis 12. Die mit Abstand beste Rauschfilterung ermöglicht die Morlet-integrierte Transformation.

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (i) In dem mit der diskreten Transformation gefilterten Bild 6.3(c) treten deutliche Tensorprodukt-Artefakte auf, die sich durch rechteckige Flächen bemerkbar machen. Sie sind für Wavelet-Basen typische Artefakte.



**Abbildung 6.3: Rauschfilterung mit Wavelet-Frames.** (a) Testbild  $f$ . Auf der Diagonale sind binomiale Spots wachsenden Durchmessers jeweils normiert auf Maximum 3 aufgetragen. Die Linien rechts oben haben Betrag 4.5, der Kreisring links unten hat Betrag 3. (b) Signal  $s := f + N$ . Das Rauschen  $N$  ist Gauß-verteilt mit Varianz  $\sigma_N^2 = 1$ . (c-e) Globale Rauschfilterung von  $s$  mit (c) diskreter, (d) dyadischer und (e) Morlet-integrierter Wavelet-Transformation.

- (ii) In Bild 6.3(c) treten deutliche Überschwing-Artefakte auf. So sind z. B. um dem Kreisring dunklere Bereiche entstanden. Da in einer Orthonormalbasis gefiltert wird, bedeutet Löschen von Koeffizienten, dass im Bild ein entsprechend skaliertes Wavelet abgezogen wird. Dessen Gestalt wird als Artefakt sichtbar.

Dieser Effekt tritt auch bei der dyadischen Transformation in Bild 6.3(d) auf, jedoch deutlich gedämpfter, da bei der Rekonstruktion eine glättende Mittelung stattfindet. Hier sind die Artefakte horizontal oder vertikal gegenüberliegende schwarz-weiße Flecken, entsprechend der Gestalt des Wavelets.

Die bei Morlet-Rekonstruktion in Bild 6.3(e) auftretenden Punkte sind dagegen keine Artefakte, sondern die Stellen, an denen die Realisierung des Rauschens  $N$  in einer oder mehreren Skalen über dem Schwellwert  $T_{b,j,l}$  liegt. Da bei der Morlet-Rekonstruktion die Skalen einfach punktweise aufaddiert werden, werden diese nicht geglättet und sehen wie das ursprüngliche Rauschen aus. Die Rauschfilterung mit Morlet-Rekonstruktion ist somit artefaktfrei.

- (iii) Kanten werden bei Morlet-Rekonstruktion optisch schlecht reproduziert, da Lücken auftreten. Während die anderen beiden Transformationen entlang der Ordinatenachsen glätten, findet bei der Morlet-Rekonstruktion keine Glättung statt. Die Spots auf der Diagonalen sowie der Kreisring bleiben bei der Morlet-Rekonstruktion in ihrer Form am besten erhalten.

□

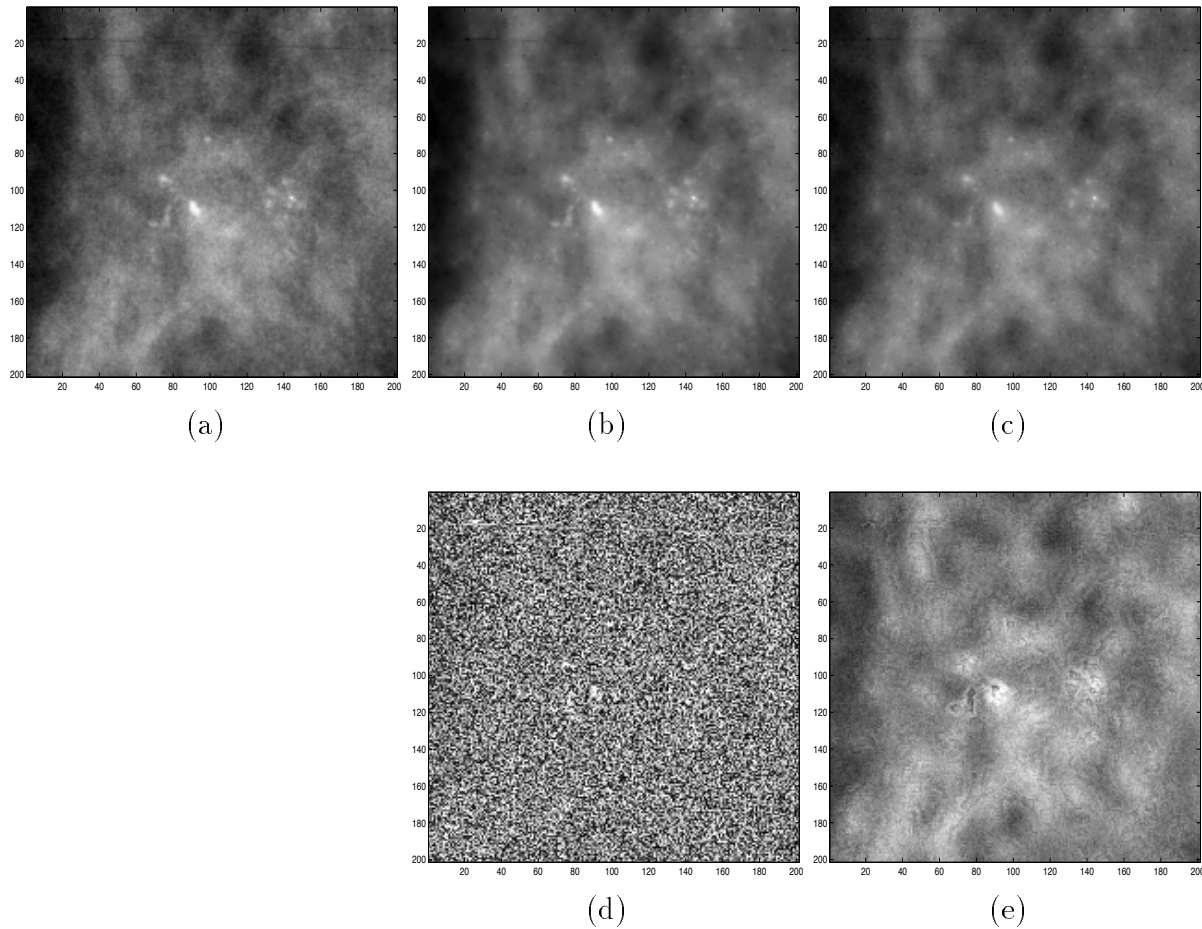
**Beispiel 6.14 (Lokale Rauschfilterung auf Mammographien)** Abbildung 6.4 zeigt die Anwendung der lokalen Rauschfilterung mit *soft-threshold* auf eine Mammographie. Die lokale Varianz wird mit dem in Bemerkung 6.12(b) beschriebenen Varianzschätzer geschätzt. Der Schwellwert für die zum Vergleich durchgeführte globale Rauschfilterung wurde gleich dem Mittelwert der geschätzten lokalen Varianzen gesetzt. Bild 6.4 (a) zeigt den verwendeten Ausschnitt aus einer digitalen Mammographie (Bild c01o, Nijmegen Datenbank). In Bild 6.4(b) wird die Rauschfilterung mit *soft-threshold* auf Wavelet-Koeffizienten der Morlet-integrierten Wavelet-Transformation bei globalem Schwellwert dargestellt. Bild 6.4(c) zeigt das Resultat mit lokalem Schwellwert.

Durch den globalen Schwellwert wird weitgehend weißes Rauschen gefiltert, wie aus dem Differenzbild 6.4(d) ersichtlich ist. Dagegen führt der lokale Schwellwert dazu, dass in Bereichen mit höherer geschätzter Varianz auch stärker gefiltert wird. Treten Strukturen im Signal auf, deren Koeffizienten über dem Schwellwert liegen, so ist die Rauschfilterung abgeschaltet, wie links der Mitte des Differenzbildes 6.4(e) deutlich sichtbar ist. Das Differenzbild 6.4(e) gibt grob die Helligkeitsverteilung des Originals 6.4(a) wieder.

Wavelets haben verschwindenden Mittelwert. Damit ist die Information über die grobe Helligkeitsverteilung des Bildes nur in der Tiefpass-Skala enthalten, aber nicht in den Wavelet-Skalen, auf denen die Rauschfilterung und der lokale Varianzschätzer operieren. Weiter wird bei Morlet-Rekonstruktion nicht geglättet. Damit ist diese Übereinstimmung zwischen Differenzbild 6.4(e) und Helligkeitsverteilung in 6.4(a) kein Artefakt der Rauschfilterung. Sie kann eher als Verifikation für die Behauptung, das Rauschen in Mammographien sei intensitätsabhängig, angesehen werden. □

## Zusammenfassung

Die Rauschfilterung in redundanten Wavelet-Frames zeigt sich der in Basen deutlich überlegen. Die Operation auf Wavelet-Koeffizienten kann als kantenerhaltende Rausch-



**Abbildung 6.4: Globale und lokale Rauschfilterung.** Rauschfilterung mit soft-threshold auf Wavelet-Koeffizienten der Morlet-integrierten Wavelet-Transformation. (a) Ausschnitt aus einer digitalen Mammographie (Bild c01o, Nijmegen Datenbank). (b) Rauschfilterung mit globalem Schwellwert, (d) zeigt das Differenzbild (b)-(a). (c) Rauschfilterung mit lokalem Schwellwert, (e) zeigt das Differenzbild. (c)-(a). Man erkennt deutlich, wie sich die Rauschfilterung mit lokalem Schwellwert an die Varianz des Rauschens im Signal anpasst.

filterung aufgefasst werden: Dabei interpretiert man die varianzgesteuerte Schwellwert-Entscheidung als einen Klassifikator, der, abhängig von dem Betrag der Wavelet-Koeffizienten, unter verschiedenen Glättungsfiltern auswählt.

Die Wahl der verwendeten Wavelets spielt keine wesentliche Rolle. Die Rauschfilterung ist nach Kapitel 5.4 weitgehend unabhängig von der Wahl des Wavelets. Dies erlaubt, als Wavelet ein für die Hervorhebung von Mikrokalk optimiertes zu wählen und damit die Komposition von Rauschfilterung mit Hervorhebung im Wavelet-Raum, wie sie in Beispiel

6.22 demonstriert wird.

Der Vorteil der flexiblen Wahl der Skalen bei (Morlet-)integrierten Wavelets wird nicht ausgenutzt. Die gegenüber der diskreten bzw. dyadischen Transformation besseren Ergebnisse beruhen auf der Wahl eines redundanten Frames bzw. der speziellen Morlet-Rekonstruktion.

## 6.9.2 Parametrische Kontrastverbesserung

Die parametrische Kontrastverbesserung ist ein Beispiel für die Kontrastverbesserung mit einem skalenweisen Punktoperator. Sie wurde in dieser Form von A. Laine et. al. in [LFY95] eingeführt. Eine einfache Variante mit konstanten Gewichten wird auch in [YZC<sup>+</sup>96] vorgestellt.

**Definition 6.15** *Seien für alle  $j \in J$  Gewichte  $K_j > 1$  und Schwellwerte  $T_j > 0$  gegeben. Weiter sei  $pk_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,*

$$pk_j(x) := \begin{cases} (x + (K_j - 1)T_j) & \text{falls } |x| > T_j, \\ K_j x & \text{falls } |x| \leq T_j. \end{cases}$$

Als **parametrische Kontrastverbesserung** bezeichnen wir den Operator  $PK : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,

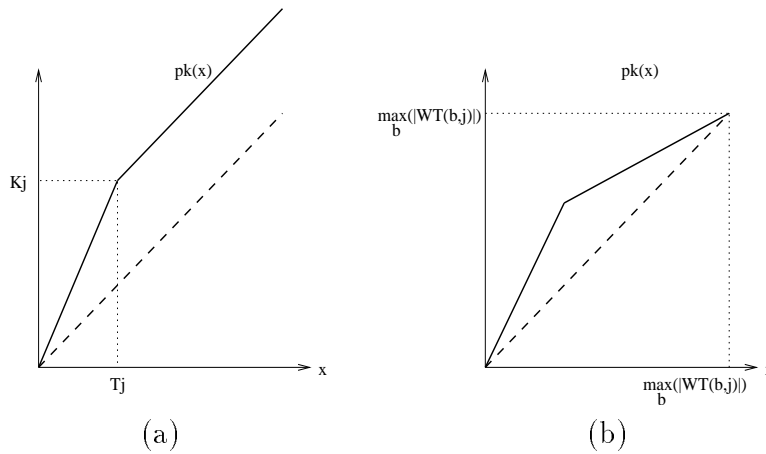
$$PK(F)(b, j) := \arg(F(b, j))pk_j(\|F(b, j)\|),$$

wobei  $F \in l^2(\Gamma)$  und  $(b, j) \in \Gamma$ .

Die parametrische Kontrastverbesserung ist eine skalenweise Punktoperation, also für festes  $j$  eine Operation auf dem Histogramm der Skala  $j$ . Der Operator bildet stetige Funktionen auf stetige ab.

Im Gegensatz zur aus der Theorie entwickelten Rauschfilterung basiert dieser Operator nur auf einer Heuristik. Die Motivation für die Definition liegt in folgender Überlegung: Kontrast drückt sich durch Kanten aus. Diese haben im Vergleich zur Umgebung große Wavelet-Koeffizienten. Die Wavelet-Koeffizienten zu Kanten mit geringem Kontrast unterscheiden sich von Kanten mit starkem Kontrast nur durch ihren Betrag. Der Operator  $PK$  verringert für  $K_j > 1$  in jeder Skala den relativen Betragsunterschied der Wavelet-Koeffizienten, wie Abbildung 6.5(b) zeigt. Vom Betrag kleine Kanten in  $f$  werden dadurch stärker hervorgehoben als große. Die Wirkung vervielfacht sich durch die Summation über Skalen, da Kanten über mehrere Skalen hinweg große Koeffizienten aufweisen. Spezielle Richtungsinformation wird nicht genutzt.

Anstatt einer linearen Skalierung des Histogramms kann auch eine Funktion der Art  $x^\alpha$  mit Ordnung  $\alpha < 1$  verwendet werden. Dann kann man den Operator folgend interpretieren: Die Abklingordnung der Maxima-Linien der Wavelet-Koeffizienten wird um die Ordnung  $\alpha$  verringert. Damit nimmt die Lipschitz-Regularität von  $f$  ab, Strukturen werden *kantiger*.

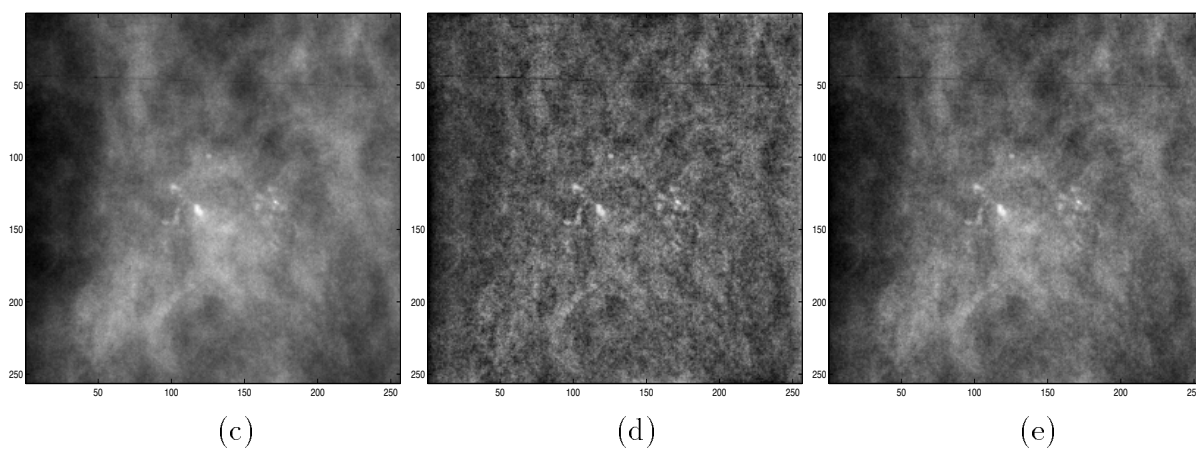
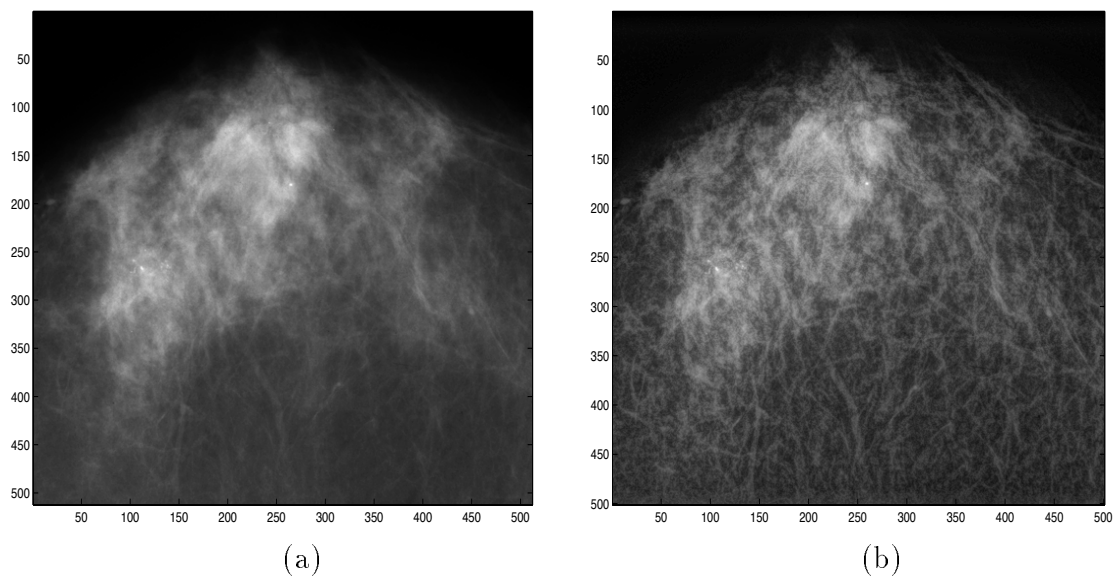


**Abbildung 6.5: Operator zur parametrischen Kontrastverbesserung.**  
 (a) Graph des Operators  $pk$  zur parametrischen Kontrastverbesserung. (b) Wirkung von  $pk$  auf die Identität, renormiert auf einen festen Wertebereich.

**Beispiel 6.16 (Parametrische Kontrastverbesserung)** Abbildung 6.6 zeigt die parametrische Kontrastverbesserung für von Hand gewählte Werte für die Parameter  $T_j$  und  $K_j$ . In Abbildung 6.6(b) treten Gefäße deutlich hervor. Die Abbildungen 6.6(d) und 6.6(e) zeigen parametrische Kontrastverbesserung des Ausschnittes 6.6(c) mit unterschiedlicher Gewichtung. Die Fläche dichten Gewebes erscheint in 6.6(b) deutlich dunkler, kleinere Strukturen treten hervor. Insbesondere Gefäße werden deutlich sichtbar. An den Detailausschnitten mit Mikrokalk erkennt man, dass Mikrokalk durch globale Kontrastverbesserung nur unwesentlich hervorgehoben wird.  $\square$

## Zusammenfassung

Bei der parametrischen Kontrastverbesserung spielt die geeignete Gewichtung der Skalen eine wesentliche Rolle. Ist diese ungünstig gewählt, so kann die Hervorhebung in einer Skala  $j$  ungewollt alle anderen Skalen dominieren und so zu optisch schlechten Resultaten führen. Die geeignete Wahl der Parameter  $T_j$  und  $K_j$  ist offen. Diese können zwar von Hand optimiert werden, dies führt aber auf kein praktikables Verfahren. Die Parameter könnten auch durch Lernen anhand vorgegebener Datensätze ermittelt werden, wie in [YZC<sup>+</sup>96] durchgeführt. Nachteil ist die hiermit verbundene Abhängigkeit vom Datenmaterial. Wünschenswert ist also ein Operator, dessen Parameter berechenbar sind, z. B. anhand eines geeigneten Modells. Bei der parametrischen Kontrastverbesserung wurden keine Nachbarschaften berücksichtigt.



**Abbildung 6.6: Parametrische Kontrastverbesserung.** (a) Ausschnitt aus einer digitalen Mammographie (Bild c03c, Nijmegen Datenbank). (b) Beispiel für parametrische Kontrastverbesserung mit integrierter Wavelet-Transformation, Gauß-Wavelet und dyadischen Skalen. Die Parameter  $T_j$  und  $K_j$  wurden von Hand gewählt. (c) Vergrößerter Ausschnitt aus (a) mit Mikrokalkherden. (d-e) Parametrische Kontrastverbesserung mit verschiedener Gewichtung.



### 6.9.3 Spot-Hervorhebung

Unser Ziel ist nun Hervorhebung speziell von Mikrokalk. Dazu nutzen wird eine modifizierte Version des von A. Laine et. al. in [LSFH94] für die Hervorhebung singulärer Strukturen eingesetzten Operators zur Spot-Hervorhebung. Er wurde dort im Zusammenhang mit der dyadischen Wavelet-Transformation verwendet. Dieser Operator basiert auf einer Heuristik. Seine genaue Gestalt spielt für die folgenden Ergebnisse keine wesentliche Rolle. Wir zeigen, dass sich der Operator bei Wahl eines geeigneten Wavelets auch zur gezielten Hervorhebung rotationsinvarianter punktförmiger Strukturen wie Mikrokalk eignet. Durch Anwenden der integrierten Wavelet-Transformation ist es möglich, den Skalenbereich an Mikrokalk angepasst zu diskretisieren, was im Vergleich zu A. Laine et. al. zu besseren Ergebnissen führt.

**Definition 6.17** Sei ein Gewichtungsfaktor  $S > 0$  gegeben. Als **Spot-Hervorhebung** bezeichnen wir den Operator  $SP : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,

$$SP(F)(b, j, l) := \begin{cases} (1 + S \cdot K_j)M_j(b)F(b, j, l) & \text{falls } M_j(b) > T_j \text{ und } 0 < j < j_{max}, \\ F(b, j, l) & \text{falls } M_j(b) \leq T_j, \end{cases}$$

wobei  $F \in l^2(\Gamma)$  und  $(b, j) \in \Gamma$ .

Der Schwellwert  $T_j$  ist definiert als

$$T_j := 0.5 \sqrt{\text{Var}((F(b, j, l))_{b \in \mathbb{Z}_n^2, l \in L})}, \quad j \in J.$$

Das Gewicht  $K_j$  sei

$$K_j := \frac{T_{max}}{T_j} - 1, \quad j \in J,$$

wobei  $T_{max} := \max_{0 \leq j \leq j_{max}} \{T_j\}$ .

Die Gewichtsfunktion  $M_j$  wird abhängig von der Transformation definiert:

(i) Bei isotroper Transformation sei

$$M_j(b) := \frac{1}{4} c_j(b) \cdot |F(b, j)|,$$

wobei  $c_j(b) \in \{0, \dots, 4\}$  die Anzahl der lokalen Richtungsmaxima von  $|F(b, j)|_{b \in \mathbb{Z}_n^2}$  im Punkt  $b$  in den vier Orientierungen horizontal, vertikal, aufwärts und abwärts einer 8-Umgebung von  $b$  ist.

(ii) Sind zwei Richtungsfilter für orthogonale Richtungen gegeben, wie z. B. bei der dyadischen Wavelet-Transformation, so setze

$$M_j(b) := \sqrt{|F(b, j, l_x)|^2 + |F(b, j, l_y)|^2},$$

falls  $\sqrt{|F(b, j, l_x)|^2 + |F(b, j, l_y)|^2}$  in  $b$  ein lokales Betrags-Maximum in Richtung des Gradienten  $\arg(F(b, j, l_x), F(b, j, l_y))$  hat, und 0 sonst.

(iii) *Gibt es mehrere Richtungsfilter  $l \in L$ , dann sei*

$$M_j(b) := \frac{1}{|L|} \sum_{l \in L} c_j(b, l) \cdot |F(b, j, l)|,$$

*wobei  $c_j(b, l) := 1$ , falls  $(F(b, j, l))_{b \in \mathbb{Z}_n^2}$  in  $b$  ein lokales Betrags-Maximum hat, und 0 sonst.*

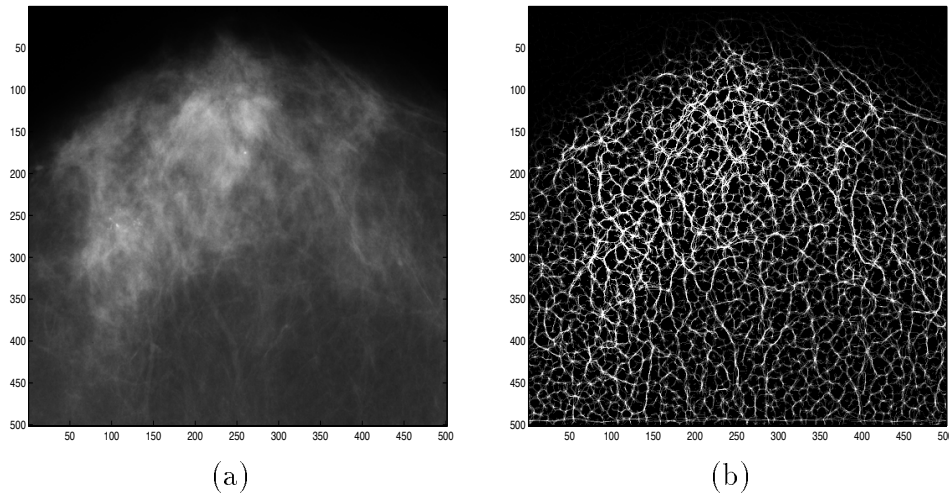
Die Spot-Hervorhebung ist ein Beispiel für einen lokalen, skalenweisen Operator. Wir entwickeln diesen Operator in Abschnitt 7.3 zu einen skalenübergreifenden Operator für die Hervorhebung mikrokalkförmiger Strukturen weiter.

Neu gegenüber der parametrischen Kontrastverbesserung ist hier das Maxima-Skelett, vgl. Definition 6.2, als Informationsträger für Spots. Vgl. dazu auch Abbildung 6.7. Dort sieht man, dass die Mittelpunkte von Mikroverkalkungen eine Teilmenge des Maxima-Skelettes bilden. *SP* operiert nicht mehr auf der ganzen Skala, sondern nur auf dem Maxima-Skelett. Allerdings führt dies dazu, dass *SP* ein unstetiges Bild hat, was man auch deutlich in den Beispielabbildungen mit Morlet-Rekonstruktion erkennt. Die Nutzung des Maxima-Skelettes ist theoretisch motiviert durch die daraus bei der dyadischen Wavelet-Transformation mögliche Rekonstruktion des Signales, wie in Abschnitt 6.8 beschrieben. Weiter neu ist die Nutzung der Orientierung. So dient der gegenüber [LSFH94] neu eingefügte Faktor  $M_j$  der Gewichtung der Koeffizienten abhängig von der Isotropie. Dies erlaubt, isotrope Strukturen wie Mikroverkalkungen besser von Linien zu unterscheiden, als es bei der parametrischen Kontrastverbesserung möglich ist.

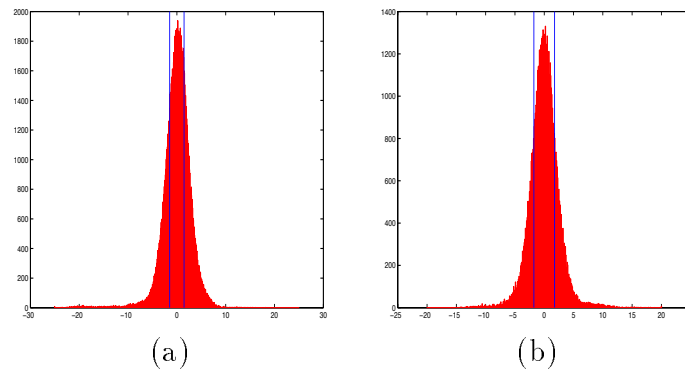
Im Unterschied zur parametrischen Kontrastverbesserung gibt es nur einen freien Parameter: Der Faktor  $S > 0$  bestimmt die Stärke der Hervorhebung. Die Wahl der Schwellwerte  $T_j$  ist empirisch festgelegt. Abbildung 6.8 zeigt für Wavelet-Koeffizienten von Mammographien typische Histogramme und die zugehörigen Schwellwerte  $T_j$ . Die Gewichtung der Wavelet-Koeffizienten mit Faktoren  $K_j > 1$  erhält lokale Skalen-Maxima. Aus Tabelle 6.2 und Beispiel 6.18 ist ersichtlich, dass die Größe der Faktoren keine wesentliche Rolle spielt, das Verfahren also diesbezüglich robust ist.

Für die folgenden Beispiele wird Abbildung 6.9(a) als Ausgangsbild verwendet. In 6.9(b) sind potentielle Mikrokalkherde markiert sowie die Umgebung, welche für die Berechnung des Kontrastes herangezogen wird. Alle Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Der Kontrast wird nach Formel (6.1) auf geeignet renormierten Bildern berechnet: In [LSFH94] wird der Kontrast nach Formel (6.1) berechnet. Das führt bei verschiedenen Verfahren zu unvergleichbaren Werten, da der im Tiefpass enthaltene Signalanteil den Kontrastwert entscheidend beeinflusst. Dies liegt an der Abhängigkeit des Kontrastmaßes von einem Offset, denn es gilt im allgemeinen  $\frac{x}{y} \neq \frac{x+b}{y+b}$ . Weiter schwanken die Faktoren  $K_j$  zwischen den verschiedenen Transformationen zum Teil stark. Um vergleichbare Werte zu erhalten, werden die Filterergebnisse deshalb so renormiert, dass Mittelwert und Varianz identisch zum Ausgangsbild  $f$  sind.

Wir haben in Abschnitt 5.2 ein Modell für Mikrokalk entwickelt, welches auf ein isotropes angepasstes Filter geführt hat. Nutzt man nun für die Spot-Hervorhebung nur ein isotropes Wavelet mit dem Ziel Mikrokalk zu isolieren, und somit Teil (i) der Definition, so

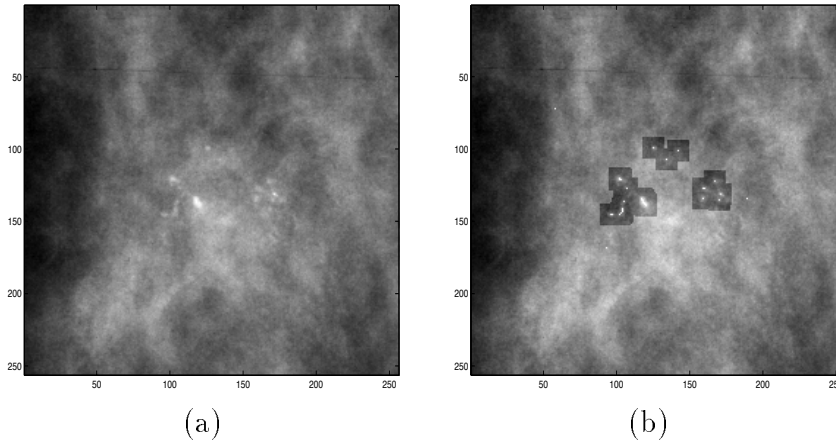


**Abbildung 6.7: Skalens-Maxima der Wavelet-Koeffizienten.** (a) Ausschnitt aus einer digitalen Mammographie (Bild c03c, Nijmegen Datenbank). (b) Summe der Skalens-Maxima nach Definition 6.17(i) der Wavelet-Koeffizienten über die Skalen 1, 2 und 3 der Morlet-integrierten Transformation, gewichtet mit der Intensität des Originals.



**Abbildung 6.8: Histogramm der Wavelet-Koeffizienten.** Dargestellt sind die Histogramme der Wavelet-Koeffizienten der Skala 2 für (a) die dyadische und (b) die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation. Bei  $\sigma/2$  sind vertikalen Linien eingeblendet, diese entsprechen dem Schwellwert  $T_2$  im Operator  $SP$ .

entstehen keine befriedigenden Ergebnisse: Kanten und andere Strukturen im Bild werden ebenfalls hervorgehoben, die Spezifität (vgl. Abschnitt 5.1) ist trotz des angepassten Filters ungenügend. Der Grund ist, dass bei einem einzelnen isotropen Filter auch nichtisotrope Strukturen im Bild allein aufgrund ihres Betrages zu großen Wavelet-Koeffizienten



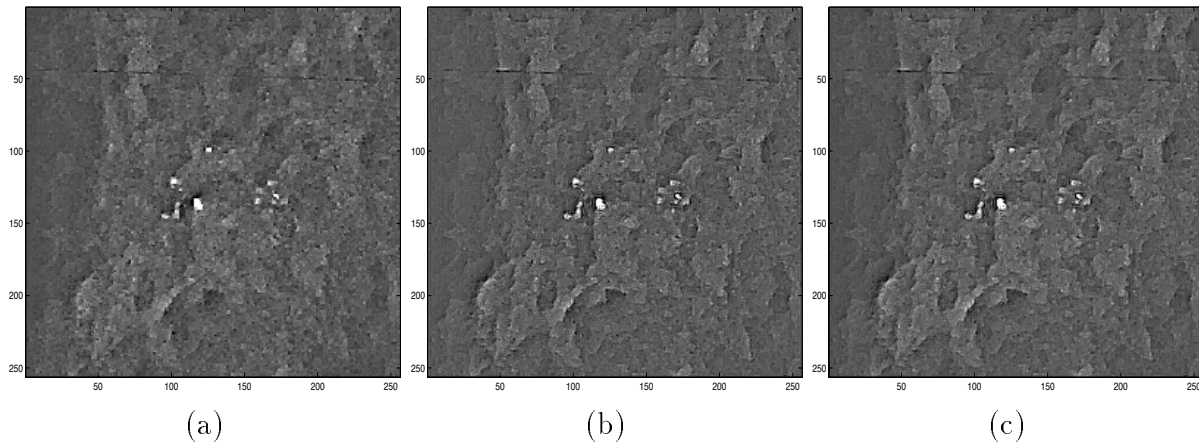
**Abbildung 6.9: Mammographie mit Mikroverkalkungen.** (a) Ausschnitt aus einer digitalen Mammographie (Bild c03c, Nijmegen Datenbank). (b) Markiert sind Mikroverkalkungen sowie die für die Berechnung des in Tabelle 6.2 zusammengestellten lokalen Kontrastes herangezogene Umgebung.

führen können, ohne besonders starke Korrelation mit dem Wavelet aufzuweisen. Dagegen kann mit zwei Richtungsfiltern, durch Vergleich der Beträge der Koeffizienten in einem Punkt, leicht zwischen isotropen und gerichteten Strukturen unterschieden werden. Wir verwenden deshalb für die integrierte Transformation zwei Richtungsfilter, welche durch eine Partition wie in Beispiel 3.23 beschrieben erzeugt sind.

**Beispiel 6.18 (Vergleich zwischen dyadischer und integrierter Transformation)**

Zuerst vergleichen wir die unterschiedlichen Diskretisierungen unter vergleichbaren Rahmenbedingungen. Die Diskretisierung der Skala wird bei der integrierten Wavelet-Transformation geometrisch gewählt. Für beide Transformationen wird ein Kantenfilter verwendet, für die dyadische Transformation ein Spline-Wavelet, für die integrierte das Filter aus Beispiel 3.20. Abbildung 6.10 zeigt wie erwartet, dass sich die Ergebnisse nicht wesentlich unterscheiden: Dargestellt ist die Spot-Hervorhebung mit dyadischer Wavelet-Transformation 6.10(a) sowie integrierter Wavelet-Transformation 6.10(b). Da die Faktoren  $K_j$  für die integrierte Wavelet-Transformation höher ausfallen, wird zusätzlich in Bild 6.10(c) die Spot-Hervorhebung mit integrierter Transformation, aber den Faktoren  $K_j$  der dyadischen Transformation dargestellt. Alle Ergebnisse sehen ähnlich aus, die Werte für die lokale Kontrastverbesserung  $I_1$  aus Tabelle 6.2, 3,89 mit dyadischer, 4,11 mit integrierter Transformation und 3,96 für Bild 6.10(c) unterschieden sich kaum. Die Größe der Faktoren spielt keine wesentliche Rolle, das Verfahren ist diesbezüglich robust.  $\square$

Nachdem dieser Vergleich gezeigt hat, dass dyadische und integrierte Transformation unter gleichen Rahmenbedingungen wie erwartet austauschbar sind, werden wir nun in den folgenden Beispielen die Möglichkeiten der integrierten Wavelet-Transformation ausnutzen.



**Abbildung 6.10: Verschiedene Transformationen.** Spot-Hervorhebung mit (a) dyadischer Wavelet-Transformation und Spline-Wavelet sowie (b) integrierter Wavelet-Transformation und dem Kantenwavelet aus Beispiel 3.23. (c) Transformation wie (b), jedoch wurden die Faktoren  $K_j$  genau wie in (a) gewählt. Abgebildet sind mit Gewicht  $S = 1$  berechnete Bilder. Die Kontrastverbesserung, vgl. Tabelle 6.2, ist 3,89, 4,11 bzw. 3,96. Man erkennt keinen sichtbaren Unterschied zwischen den Transformationen. Auch spielt die Wahl der Faktoren  $K_j$  keine bedeutende Rolle.

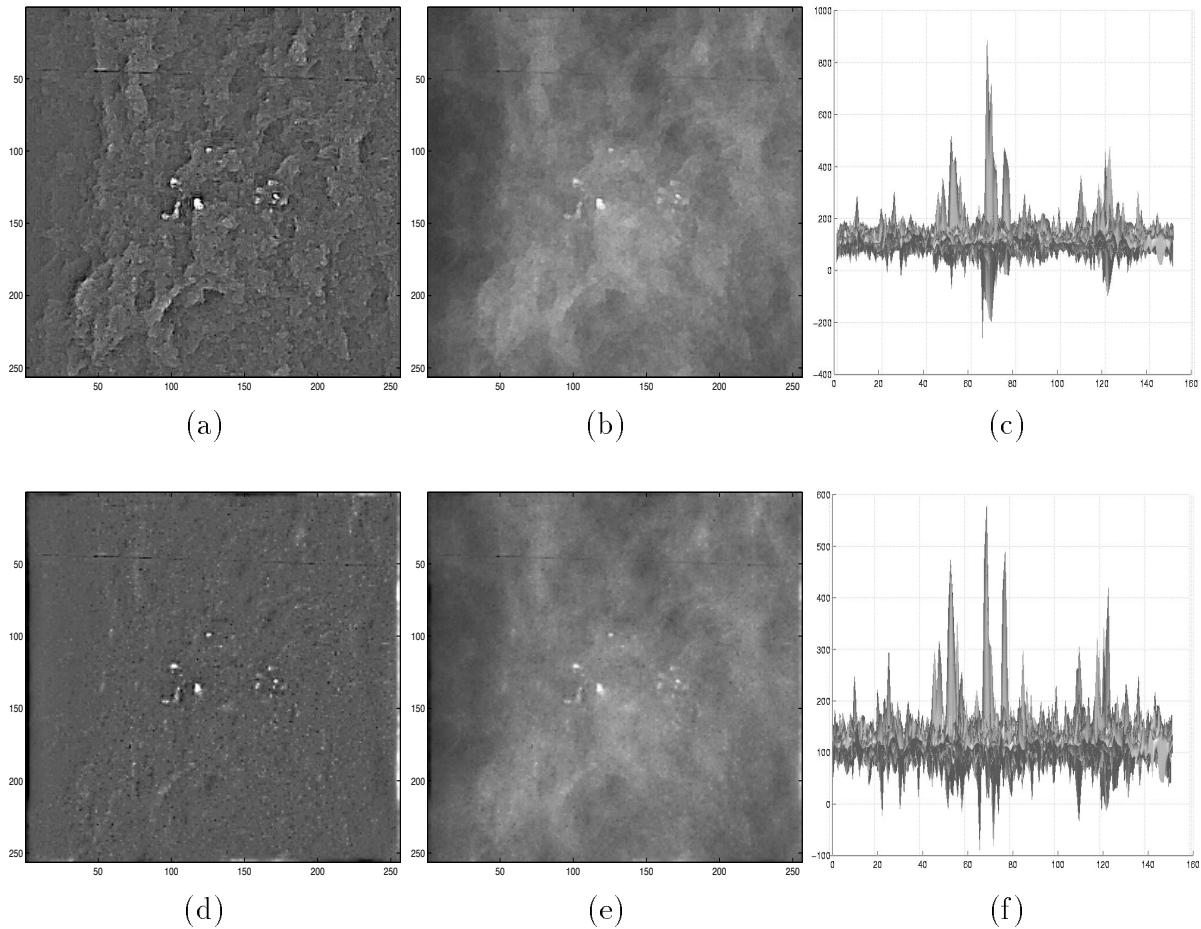
**Beispiel 6.19 (Vergleich verschiedener Wavelets)** In [LSFH94] wird ein Spline-Wavelet als Kantenfilter verwendet. Mikrokalkphantome werden dort auf Pixelebene modelliert, entsprechen also Kanten im Bild. In Abschnitt 5.2 hingegen haben wir ein Mikrokalkmodell entwickelt, welches die Wahl eines Gauß-Wavelets als angepasstes Filter motiviert hat. In Abbildung 6.11 wird die unterschiedliche Wirkung dieser beiden Wavelets verglichen.

Die Kontrastverbesserung  $I_1$  mit einem Kantenfilter in Bild 6.11(a) liegt bei 4,15 (Tabelle 6.2(iii)), mit dem an Mikrokalk angepassten Gauß-Filter (Bild 6.11(d)) nur bei 4,08 (Tabelle 6.2(iv)). Das Gauß-Wavelet ist bezogen auf dieses Kontrastmaß etwas schlechter.

Das trifft aber nur auf den lokalen Kontrast zu. Vergleicht man Abbildung 6.11(a) und (b), so erkennt man, dass die Spezifität im Bezug auf die Hervorhebung von Mikrokalk in dem Bild mit Gauß-Wavelet höher ist. So werden Kanten im Bild von dem Gauß-Wavelet ignoriert. Darüber hinaus zeigt auch Abbildung 6.11(f), dass Mikrokalk besser vom Hintergrund getrennt wird.

Die trotzdem etwas schlechteren lokalen Kontrastwerte lassen sich durch die geringeren Überschwingartefakte des Gauß-Wavelets gegenüber einem Kantenfilter erklären. So produziert ein Kantenfilter tiefe *Gräben* um die Mikrokalkherde, die in die Kontrastberechnung eingehen.

Das an Mikrokalk angepasste Wavelet sorgt also für gezielte Hervorhebung von Mikrokalk

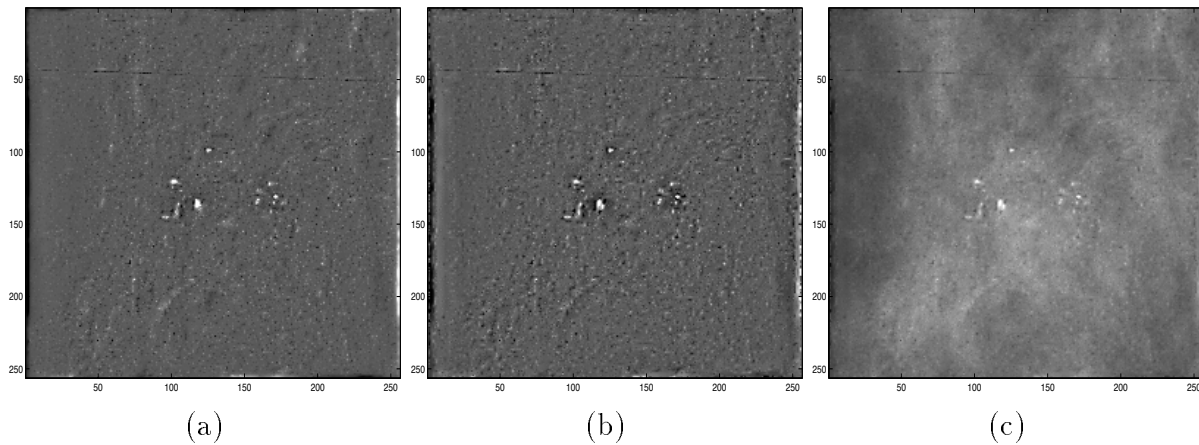


**Abbildung 6.11: Verschiedene Wavelets.** Spot-Hervorhebung mit integrierter Wavelet-Transformation. In (a-c) wird das Kantenwavelet aus Beispiel 3.23 verwendet, in (d-f) das Gauß-Wavelet. Der Gewichtungsfaktor ist in (a) und (d)  $S = 1$ , in (b) und (e)  $S = 1/4$ . Abbildungen (c) und (f) zeigen eine dreidimensionale Ansicht von vorne. Die Kontrastwerte finden sich in Tabelle 6.2. Man erkennt deutlich die im Bezug auf Mikrokalk höhere Spezifität des Gauß-Wavelets.

statt von Singularitäten und Kanten. Dies hat insbesondere einen Vorteil für die Untersuchung hochauflöser Bilder. Dort stehen einzelne Singularitäten eher für Filmfehler, Mikrokalk dagegen bildet größere Hügel, mit Durchmessern von mehreren Pixeln. Damit ist das Gauß-Wavelet einem Kantenfilter überlegen.  $\square$

**Beispiel 6.20 (Vergleich zwischen geometrischen Skalen und feiner Diskretisierung)** Wir haben die integrierte Wavelet-Transformation aufgrund ihrer Flexibilität bei der Diskretisierung der Skalen eingeführt. Abbildung 6.12 zeigt den Vergleich zwischen

einer geometrischen Diskretisierung der Skalen und einer an Mikrokalk angepassten, feineren Diskretisierung. Die Kontrastverbesserung  $I_1$  liegt mit geometrischen Skalen bei 4,08



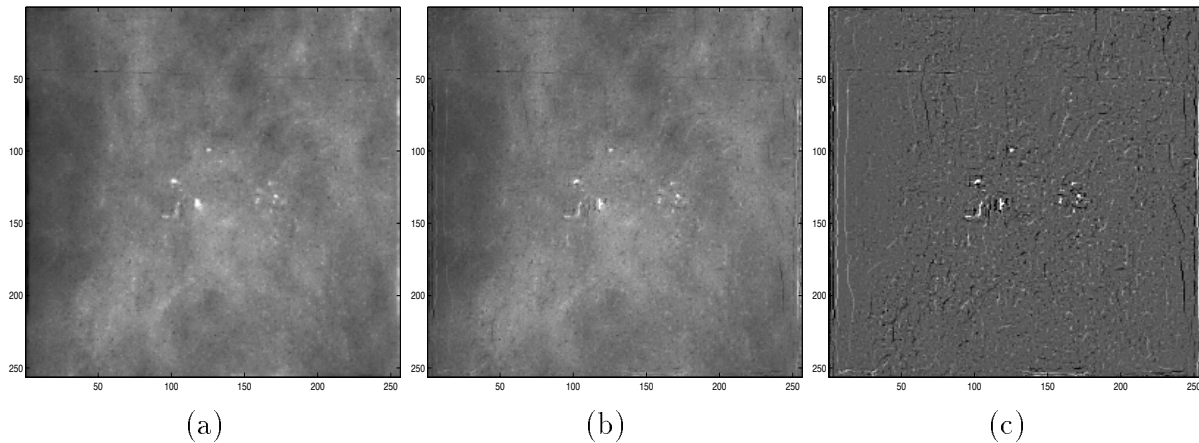
**Abbildung 6.12: Feine Diskretisierung der Skalen.** Spot-Hervorhebung mit integrierter Wavelet-Transformation und Gauß-Wavelet. (a) Die Diskretisierung der Skalen ist geometrisch gewählt, es werden fünf Skalen berechnet. (b) und (c): Zu obigen Skalen wurden in dem für Mikrokalk relevanten Bereich zwei weitere eingefügt. Es werden insgesamt sieben Skalen berechnet. Abgebildet sind mit Faktor (b)  $S = 1$ , und (c)  $S = 1/4$  berechnete Bilder. Die Kontrastverbesserung beträgt (a) 4,08 und (b) 4,35. (Vgl. Tabelle 6.2).

(Tabelle 6.2(iv)). Für die feinere Diskretisierung, bei der zwei Skalen in dem für Mikrokalk relevanten Bereich unterteilt wurden und somit statt 5 nun 7 Wavelet-Skalen berechnet wurden, ergibt sich eine Kontrastverbesserung von 4,35 (Tabelle 6.2(vi)).

Die Anpassung der Diskretisierung führt also zu einer Kontrastverbesserung von etwa 5 bis 10%. Dass so eine Verbesserung eintritt, ist nicht überraschend. Allerdings wäre mit klassischen Wavelet-Frames eine angepasste Diskretisierung der Skalen nicht praktikabel. Erst die integrierte Wavelet-Transformation erlaubt diese Freiheit.  $\square$

**Beispiel 6.21 (Vergleich zwischen integrierter und Morlet-integrierter Transformation)** Abbildung 6.13 zeigt die Morlet-integrierte und die integrierte Wavelet-Transformation im Vergleich. Der Unterschied liegt hauptsächlich in der Art der Rekonstruktion.

Bei Morlet-Rekonstruktion entstehen Linien-Artefakte im Bild. Diese stammen von dem un stetigen Bild unter Spot-Hervorhebung und entsprechen den Maxima-Skelett der Skalen. Bei der Rekonstruktion mit der integrierten Transformation wird diese Unstetigkeit geglättet und ist deshalb für das Auge nicht mehr deutlich sichtbar.



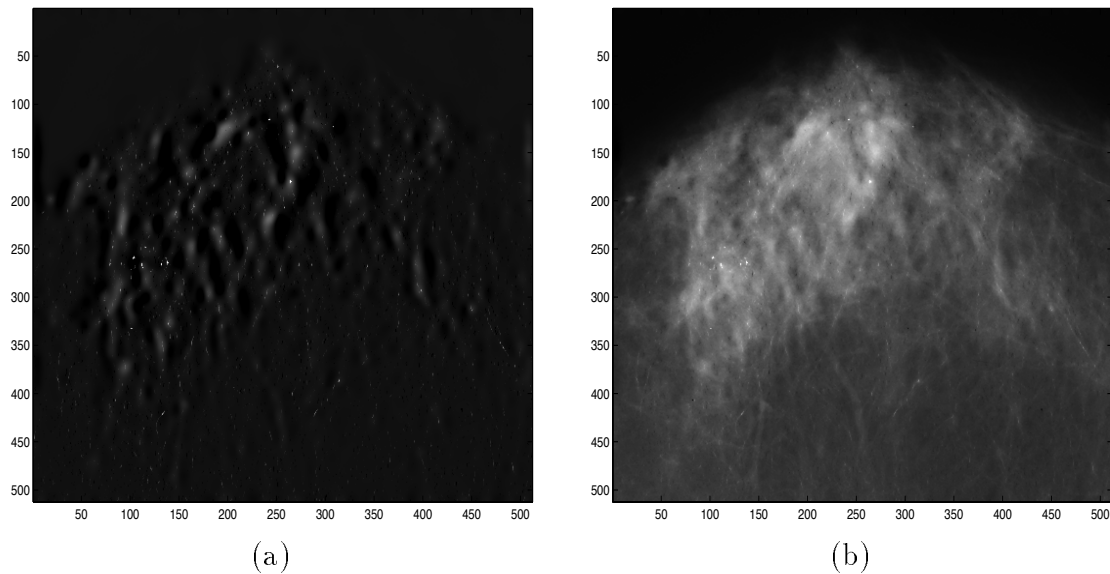
**Abbildung 6.13: Verschiedene Rekonstruktionen.** (a) Integrierte und (b-c) Morlet-integriert Wavelet-Transformation mit Gauß-Wavelet und geometrischen Skalen. Abgebildet sind mit Faktor (b)  $S = 1/4$  und (c)  $S = 1$  berechnete Bilder. Die Kontrastwerte finden sich in Tabelle 6.2. Man erkennt bei der Morlet-Rekonstruktion Artefakte, die von dem unstetigen Bild des Spot-Enhancement stammen.

Die Kontrastverbesserung ist mit Morlet-integrierter Transformation besser, was auf der bei Morlet-Rekonstruktion fehlenden Glättung beruht. Allerdings betrifft dies nur die Mittelpunkte der Mikrokalkherde, gerade größerer Mikrokalk wird bei dieser Rekonstruktion deformiert.

Bei der in Abschnitt 6.9.1 untersuchten Rauschfilterung konnten mit Morlet-Rekonstruktion bessere Ergebnisse erzielt werden, da das Bild der lokalen Rauschfilterung mit soft-threshold stetig ist.  $\square$

**Beispiel 6.22 (Adaptive Rauschfilterung und Hervorhebung)** Für Abbildung 6.14 wurde die adaptive Rauschfilterung aus Beispiel 6.14 mit der Spot-Hervorhebung verknüpft, d. h. auf die Koeffizienten der integrierten Wavelet-Transformation der Operator  $SP \circ D$  angewendet. Dazu wurde die feine Diskretisierung aus Beispiel 6.20 verwendet. Das Originalbild ist in Abbildung 6.7(a) dargestellt. Abbildung 6.14(a) zeigt das Ergebnis der Hervorhebung für  $S = 1$ , 6.14(b) zeigt  $S = 1/10$ . In 6.14(a) erkennt man links der Bildmitte deutlich den Mikrokalk-Cluster aus Abbildung 6.9(a). Der Kontrast des Bildausschnittes wird um Faktor 4,41 angehoben. Ohne vorhergehende Rauschfilterung wird nur eine Kontrastverbesserung von 4,35 erreicht. Die hohe Spezifität erklärt sich dadurch, dass gegenüber dem nicht rauschgefilterten Bild weniger Rauschartefakte hervorgehoben werden.  $\square$





**Abbildung 6.14: Adaptive Rauschfilterung und Hervorhebung.** Dargestellt ist die Spot-Hervorhebung mit vorgeschalteter adaptiver Rauschfilterung auf integrierten Wavelet-Koeffizienten mit feiner Diskretisierung der Skala. Das Originalbild ist in Abbildung 6.7(a) dargestellt. Der Gewichtungsfaktor ist (a)  $S = 1$  und (b)  $S = 1/10$ . Man erkennt links der Bildmitte deutlich den Mikrokalk-Cluster aus Abbildung 6.9(a).

## Zusammenfassung

Im Vergleich zu den zitierten Arbeiten von A. Laine et. al. wurden alle Bestandteile der Hervorhebung optimiert. Die Wahl eines an Mikrokalk angepassten Wavelets sowie eine flexible, feine Diskretisierung der Skalen führen zu besseren Ergebnissen im Bezug auf Sensitivität – höherer lokaler Kontrast – als auch Spezifität – weniger hervorgehobene Kanten – bei der Hervorhebung von Mikrokalk. Darüber hinaus ist das Verfahren flexibel an Bilder variierender Auflösung anpassbar.

Die Morlet-Rekonstruktion ist trotz sehr guter Kontrastverbesserung nicht für diesen Operator geeignet, da Artefakte, begründet durch das unstetige Bild der Spot-Hervorhebung, entstehen.

Die Spot-Hervorhebung nutzt keine skalenübergreifende Information. Schwerpunkt der Diskussion war hier der Vorteil integrierter Wavelet-Frames über klassischen Diskretisierungen. Im folgenden Kapitel 7 werden skalenübergreifende Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten untersucht. Daran anschließend wird in Abschnitt 7.3 ein neuer, auf diesen Ergebnissen sowie der Spot-Hervorhebung aufbauender skalenübergreifender Operator zur Hervorhebung mikrokalkförmiger Strukturen konstruiert.

Transformation	$C$	$I_1$	$I_{Abb}$
Original $f$	0,13	1	1
Kanten-Wavelet, geometrische Skalen			
(i) Dyadische WT	0,49	3,89	1,95
(ii) Integrierte WT	0,50	3,96	1,96
(iii) Integ. WT, Faktoren $K_j$ wie in (i)	0,52	4,15	2,03
Gauß-Wavelet, geometrische Skalen			
(iv) Integ. WT	0,51	4,08	2,00
(v) Integ. WT + adapt. Rauschfilterung	0,52	4,11	2,03
(vi) Morlet-integ. WT	0,53	4,17	2,04
Gauß-Wavelet, feine Diskretisierung			
(vii) Integ. WT	0,52	4,35	2,14
(viii) Integ. WT + adapt. Rauschfilterung	0,56	4,41	2,18

	Faktoren $K_j$						
<i>Skala</i>	0-8	8-16		16-32		32-64	64 -
(i)	6,6	8,0		6,2		4,5	1
(ii)	6,6	8,0		6,2		4,5	1
(iii)	19,9	21,6		16,2		11,7	1
(iv)	25,3	21,7		20,4		14,2	1
(v)	25,3	21,7		20,4		14,2	1
(vi)	45,0	32,9		28,8		21,1	1
<i>Skala</i>	0-11	11-16	16-23	23-32	32-42	42-64	64 -
(vii)	21,4	36,6	31,8	27,1	21,9	18,7	1
(viii)	21,4	36,6	31,8	27,1	21,9	18,7	1

**Tabelle 6.2: Ergebnisse der Spot-Hervorhebung.** Diese Tabelle fasst die zu den in den Abbildungen 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 und 6.14 dargestellten Bildern gehörenden Parameter zusammen. Für (i) wurde das Spline-Wavelet aus [MZ92] verwendet. Für (ii) und (iii) wurde als Wavelet das Kantenfilter aus Beispiel 3.23 benutzt, für (iv-viii) das Gauß-Wavelets aus 3.23, jeweils mit Partition der Rotation in zwei Richtungen. Der lokale Kontrast  $C$  wurde anhand Abbildung 6.9(b) und Formel (6.1) berechnet. Um vergleichbare Werte zu erhalten, wurden die Filterergebnisse renormiert, so dass Mittelwert und Varianz identisch zum Ausgangsbild  $f$  sind.  $I_1$  ist die lokale Kontrastverbesserung  $C_{WT}/C_f$  für  $S = 1$ .  $I_{Abb}$  gibt die Kontrastverbesserung für  $S = 1/4$  an. Die Bilder haben eine Auflösung von 254 dpi (0,1 mm Abtastweite). Die Parameter  $a_j$  für die in Formel (6.3) genannten Filter lauten  $a_j := Skala/2048$ . Die Skalen entsprechen damit Filterdurchmessern von 0,4 mm bis 3,5 mm.

## 6.10 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der neue Begriff der Hervorhebung auf Wavelet-Frames eingeführt, der verschiedene Operationen zur Bildverbesserung zusammenfasst.

Was wurde erreicht?

Wir haben gezeigt, dass sich die Morlet-integrierte Wavelet-Transformation aufgrund ihrer besonderen Rekonstruktion für Rauschfilterung eignet. In Beispiel 6.13 wurde dazu eine artefaktfreie Rauschfilterung vorgestellt.

Integrierte Wavelets erlauben bessere Ergebnisse bei der Hervorhebung von Mikrokalk, da die Diskretisierung der Skalen flexibel und fein angepasst werden kann. Dies zeigt Beispiel 6.20 zur Spot-Hervorhebung.

Weiter wurde die Wavelet-Transformation nicht als Kantendetektor, sondern, mit dem Gauß-Wavelet als Filter, als an Mikrokalk angepasste Filterbank verwendet. Damit konnten in Beispiel 6.19 für die Spot-Hervorhebung ebenfalls verbesserte Resultate erzielt werden.

Was bleibt zu tun?

Die bisherigen Beispiele haben nur Mikrokalk in einfachem Gewebe betrachtet. Staub, Kratzer und Kreuzungen von Gefäßen werden bei der Spot-Hervorhebung jedoch ebenfalls hervorgehoben. (Ein Beispiel folgt im nächsten Kapitel.) Diese Strukturen müssen besser von Mikrokalk unterschieden werden. Die Operation zur Hervorhebung fand in den Beispielen des letzten Abschnittes nur skalenweise statt, vgl. Abschnitt 6.7. Wavelet-Koeffizienten sind aber über Skalen hinweg sehr stark korreliert. Die damit verbundene Information wird bei skalenweisen Operatoren nicht ausgenutzt.

Deshalb werden im folgenden Kapitel skalenübergreifende Merkmale auf Wavelet-Koeffizienten untersucht. Diese Betrachtungen dienen hauptsächlich der Klassifikation von Mikrokalk. Sie können aber auch, wie in Abschnitt 7.3 demonstriert wird, zur Konstruktion eines skalenübergreifenden Operators zur Hervorhebung von Mikrokalk genutzt werden.



# Kapitel 7

## Detektion von Mikroverkalkungen

Bei der im letzten Kapitel betrachteten Hervorhebung bleibt die Entscheidung, ob Mikrokalk vorliegt, dem Betrachter überlassen. Bei der Detektion wird sie nun durch den Algorithmus getroffen. Die Detektion von Mikroverkalkungen kann in zwei Aufgaben gegliedert werden: Definition eines Merkmalvektors, sowie Auswahl und eventuelles Training eines Klassifikators. In diesem Kapitel werden Merkmale vorgeschlagen, die auf Wavelet-Koeffizienten definiert sind und skalenübergreifende Information nutzen. Ziel ist dabei zu demonstrieren, dass Wavelet-basierte Merkmale auch für die Detektion geeignet sind. Dabei wird das durch die Wavelet-Analyse gegebene mathematische Fundament als Motivation genutzt. Darüber hinaus gehende Strategien zur Merkmalselektion, sowie Wahl und Training eines Klassifikators, sind nicht Aufgabe dieser Arbeit. Da für die Generierung von Merkmalen keine Rekonstruktion des Bildes erforderlich ist, gibt es auch keine zwingende Notwendigkeit, spezielle Diskretisierungen der Wavelet-Transformation durch Frames zu verwenden.

Abschnitt 7.1 gibt einen kurzen Überblick der Literatur zur Detektion von Mikroverkalkungen. In Abschnitt 7.2 werden skalenübergreifende Merkmale für die Detektion von Mikroverkalkungen betrachtet. Exemplarische Untersuchungen zeigen deren Nutzen auf. In Abschnitt 7.3 werden die Erkenntnisse aus 7.2 für die Hervorhebung von Mikrokalk genutzt. Das Kapitel bietet Anknüpfungspunkte für weitergehende angewandte Forschung, die aber aus der Wavelet-Analyse hinausreichen.

### 7.1 Literaturüberblick

Die zuverlässige Detektion von Mikrokalk in Mammographien gehört zu den anspruchsvollsten Aufgaben der medizinischen Bildverarbeitung: Die Bilder weisen ein sehr schlechtes Signal-Rauschverhältnis auf, die Aufnahmeparameter der Bildentstehung sind in der Regel nicht verfügbar, die Aufnahmen enthalten eine Vielfalt an komplexen Strukturen und der gesuchte Mikrokalk ist sehr klein, in der Form variantenreich und schwer zu erkennen. Darüber hinaus werden von einem Detektionsverfahren aufgrund der hohen Zahl an Krebsfällen und der großen Bedeutung der Früherkennung extrem niedrige Fehlerraten

erwartet.

Diese Faktoren setzen einem modellbasierten Ansatz Grenzen. Die im folgenden zitierten Arbeiten, bei denen Filter verwendet werden, entwickeln daher nicht von einem präzisen Mikrokalkmodell ausgehend ein ideales Filter, sondern versuchen für Mikrokalk typische Eigenschaften durch robuste Merkmale zu beschreiben. Allgemein anerkannte Eigenschaften sind:

- (i) Mikrokalk ist heller als benachbarte Strukturen. Dies ist, motiviert durch die gegenüber Gewebe deutlich höhere Dichte, eine allen Ansätzen gemeinsame Annahme.
- (ii) Mikrokalk ist näherungsweise isotrop. Dies ist bereits eine Vereinfachung der Problemstellung, die, wie in Abbildung 5.2 demonstriert, bei durch bösartige Tumoren hervorgerufenen Verkalkungen nicht immer erfüllt ist.

Beide Annahmen stimmen mit dem in Abschnitt 5.2 entwickelten Mikrokalkmodell überein.

In den letzten zehn Jahren wurde in der medizinischen Bildverarbeitung intensiv auf dem Gebiet der Mikrokalkdetektion geforscht. Hier wird ein Überblick der wichtigsten Arbeiten vorgestellt, mit Schwerpunkt auf Multiskalen-Ansätzen.

Für die Detektion von Mikroverkalkungen wird oft ein mehrstufiges Vorgehen gewählt: In einem ersten Schritt werden pixelweise Merkmale benutzt, um Mikrokalkherde zu lokalisieren. Diese Information wird zur Segmentation des Bildes verwendet. Dabei wird der Umriss von Mikrokalk markiert. Dies erlaubt in einem zweiten Schritt, regionenweise Merkmale wie Form und Fläche von potentiellen Verkalkungen zu verwenden.

Die Segmentation erfolgt typischerweise mit *region grow*-Techniken [Cas96]. Dabei wird von Startpunkten ausgehend die Form von Mikrokalk ausgefüllt. Zum Beispiel wird in [SRD93] für Pixel, die eine Helligkeit über dem Mittel eines hochpassgefilterten Bildes haben, ein *multi-tolerance region grow* verwendet, um das Bild zu segmentieren. In [BN93] wird eine Pyramidenzerlegung des Bildes benutzt, um Startpunkte für ein *region grow* zu bestimmen.

Nachteile des Ansatzes über Segmentation sind der hohe Rechenaufwand sowie die, insbesondere bei geringen Bildauflösungen, ungenaue Segmentation der Ränder von Mikrokalk. In [MSvD98] wird daher vorgeschlagen, Merkmale nicht aus einer Segmentation zu gewinnen sondern direkt aus lokalen Bildumgebungen abzuleiten. Die Wavelet-Transformation indiziert ein Bild durch die zugrunde liegende Gruppe, in unserem Fall durch Anteile zu verschiedenen Skalen und Richtungen. Damit ist es möglich, aus dem Wavelet-Koeffizienten geometrische Information zu ermitteln, ohne eine explizite Segmentation durchzuführen.

In [BGH93] wird eine Filter-Pyramide mit Gauß-Quadraturfiltern berechnet. Als pixelweise Merkmale werden je Skala lokale Orientierung, lokale Energie und lokale Phase verwendet. Weiter wird ein Form-Merkmal (linear bis rund) beschrieben.

In [SH96] wird die DWT mit biorthogonalen Spline-Wavelets und vier Skalen mit zwei interpolierenden Skalen (*voices*) berechnet. Das zugrunde liegende Modell wurde in Ab-

schnitt 6.4.1 diskutiert. Auf die Skalen wird, analog zur Hervorhebung, ein binärer Schwellwertoperator angewendet. Als pixelweises Merkmal dient dann die Summe der Werte über Skalen. Die Ergebnisse werden als – in Anbetracht des sehr einfachen Klassifikationsansatzes – überraschend gut bewertet und demonstrieren die Stärke des Wavelet-Ansatzes. In der *scale-space* Theorie [Lin98], welche ein Vorläufer der Wavelet-Theorie in der Bildverarbeitung ist, werden Maxima über Skalen betrachtet und damit auf die Größe des gesuchten Signales geschlossen. In [Net96, Net98] findet sich eine Anwendung des *scale-space* auf die Detektion von Mikrokalk. Dort wird aus dem Maximum und dem Wert der *scale-space* Darstellung an dieser Stelle auf die Größe und den Kontrast des Mikrokalk geschlossen. Das Verfahren kann aber nicht sicher zwischen Mikrokalk und Artefakten oder Gefäß-Strukturen unterscheiden. Dies liegt daran, dass nur isotrope Filter verwendet werden [Net96].

Es gibt einige Arbeiten, die generische statistische Merkmale verwenden. In [CDM93] werden z. B. Grauwertistogramm, Entropie, Kontrast, Korrelation, Standardabweichung und Mittelwert als Merkmal verwendet. In [GYCA96] werden auf einer Multiskalenzerlegung die ersten vier Momente (Mittel, Varianz, Schiefe und Kurtosis) geschätzt und als Merkmal benutzt. Die Ergebnisse bleiben hinter denen anderer Arbeiten zurück.

N. Karsenmeijer [Kar91] verwendet zur Segmentation und Klassifikation ein Markov Zufallsfeld (*Markov random field*). Dieses erlaubt, Beziehungen zwischen benachbarten Pixeln zu modellieren. Das Markov Zufallsfeld operiert auf einfachen Merkmalen für lokalen Kontrast und linienartige Strukturen. Die Ergebnisse dieser Nachbarschaften berücksichtigenden Klassifikation sind einer pixelweisen Klassifikation deutlich überlegen.

Den einzigen durchgängig modellbasierten Ansatz entwickeln M. Brady et. al. [HB99, YBHE99]. Ausgehend von der Annahme, dass nur Fett bzw. Gewebe (*interesting tissue*) auftreten, deren Absorptionsraten verschieden und bekannt sind, wird das lokale Volumen der komprimierten Brust aus dem Intensitätsbild geschätzt. Mikrokalk wird in diesem Modell gezielt ignoriert. Da Mikroverkalkungen eine ca. 26-fach höhere Absorptionsrate als Gewebe haben, wird für diese daher ein entsprechend großes Gewebe-Volumen geschätzt. Dies führt dazu, dass Verkalkungen als Hügel in der Volumenschätzung hervortreten. Wesentliche Vorbedingung für gute Resultate ist hier ein normiertes Bild, bei dem Grauwerte und Intensität der Strahlung zugeordnet werden können.

## 7.2 Auf Wavelet-Koeffizienten basierende Merkmale

In diesem Abschnitt werden auf Wavelet-Koeffizienten definierte Merkmale für die Detektion von Mikrokalk vorgeschlagen. Schwerpunkt ist die Nutzung skalenübergreifender Information. Diese Merkmale sind in obigem Sinn pixelweise Merkmale. Eine weiterführende Segmentation und darauf aufbauende geometrische Merkmale werden hier nicht untersucht, da dort kein Zusammenhang zur Wavelet-Analysis besteht.

Die Betrachtung skalenübergreifender Merkmale ergänzt die in Kapitel 6 geführte Diskussion. Dort wurden skalenweise Operatoren, motiviert durch angepasste Filter und skalen-

weise Extrema betrachtet.

Zuerst eine Vorüberlegung: Im Vergleich zur Bildgröße tritt Mikrokalk mit verschwindender Häufigkeit auf. Von den  $2048 \cdot 2048 = 4.194.304$  Pixeln einer Mammographie gehören nur etwa 20 bis 400 Pixel zu Mikrokalk – falls in der Aufnahme überhaupt Verkalkungen auftreten. Das entspricht weniger als 0,01%. Damit ein Klassifikator die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Klassen mit großer Genauigkeit approximieren kann, ist es jedoch vorteilhaft, wenn die Häufigkeiten der auftretenden Klassen in der gleichen Größenordnung liegen.

Wir lösen dieses Problem, indem wir die Spot-Hervorhebung aus dem vorigen Kapitel zur Grobsegmentation des Bildes verwenden. Dazu wird durch Anwenden eines Schwellwertoperators aus dem Ergebnis der Hervorhebung eine Binärmaske erzeugt. Der Schwellwert ist so gewählt, dass alle Mikroverkalkungen in dem Binärbild auftreten.

Abbildung 7.1 zeigt die den folgenden Beispielen zugrunde liegende Situation. Der in Abbildung 7.1(a) dargestellte Ausschnitt aus einer Mammographie enthält rechts der Mitte Mikrokalk. Weiter ist links oben ein für Radiographien typisches Kratz-Artefakt sichtbar. Solche Artefakte entstehen häufig beim Hantieren mit dem Film.

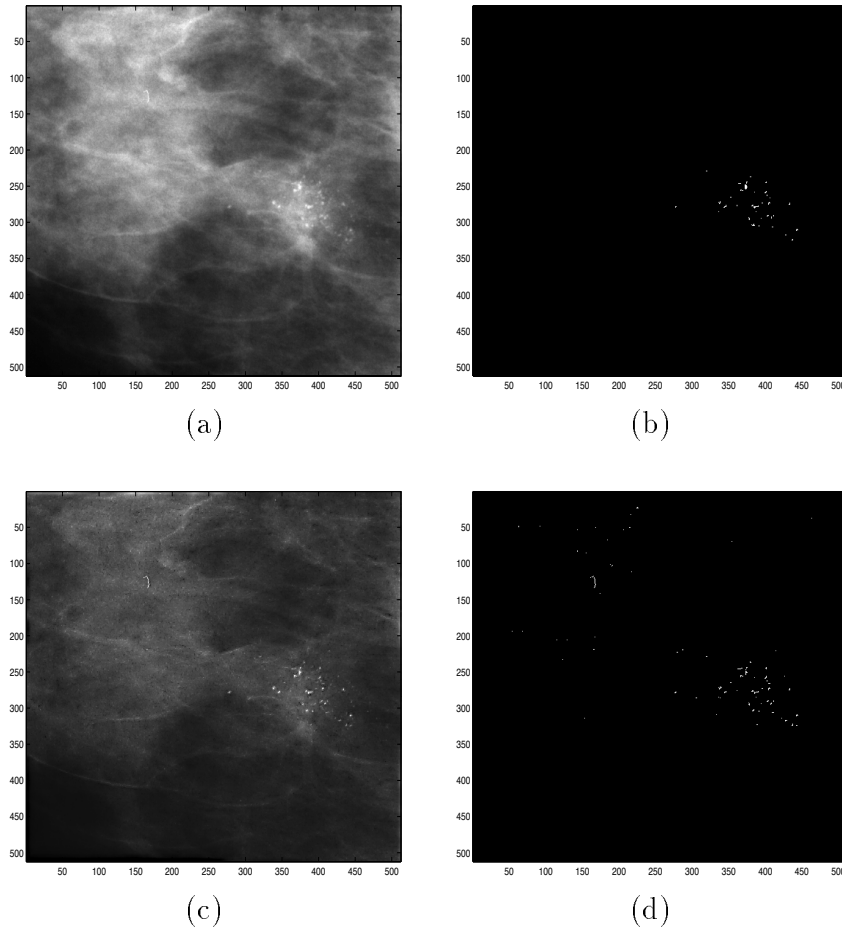
Im unteren Bereich treten linienartige Gewebestrukturen auf. Abbildung 7.1(d) zeigt die durch Schwellwertoperation auf dem durch Hervorhebung erzeugten Bild 7.1(c) entstandene Binärmaske. Dazu wurde für Abbildung 7.1(d) der Tiefpass-Filter bei der Rekonstruktion weggelassen.

Wir unterscheiden in drei Klassen: Mikrokalk, Artefakt und Sonstige. Im folgenden werden nur noch die in der Binärmaske markierten Pixel klassifiziert. Damit sind die Klassen von vergleichbarer Mächtigkeit.

Die Mikrokalk-Maske in Abbildung 7.1(b) ist aus der Nijmegen-Bilddatenbank übernommen und manuell nachbearbeitet. Das Kratzartefakt ist die linienförmige Struktur im linken oberen Quadranten. Die Klasse Sonstige ergibt sich durch die restlichen Punkte der Binärmaske 7.1(d). Dies sind im wesentlichen linienförmiges Gewebe und Gewebekreuzungen.

Es sei angemerkt, dass die folgenden Beispiele an einem einzelnen Testbild nur exemplarischen Charakter haben. Für die praktische Anwendung ist darüber hinaus zu untersuchen, ob vergleichbare Ergebnisse auch über große Bildserien erzielt werden können. Solche, auf diese Arbeit aufbauenden Untersuchungen werden zur Zeit bei der Firma IMAGETOOL durchgeführt.





**Abbildung 7.1: Binärmaske für Detektion.** (a) Ausschnitt aus Bild c05c der Nijmegen Mammographie-Bilddatenbank. (b) Mikrokalkmaske. (c) Spot-Hervorhebung von (a) nach Tabelle 6.2(iv). Es wurden integrierte Wavelets mit zwei aus dem Gauß-Wavelet erzeugten Richtungsfiltern und fünf Skalen verwendet. (d) Binärmaske, entstanden durch Schwellwertoperation auf (c). Der Schwellwert wurde von Hand so gewählt, dass alle Mikroverkalkungen aus (b) in der Binärmaske auftreten. Darüber hinaus erkennt man links oben das Kratz-Artefakt sowie weitere verstreut über dem Schwellwert liegende Punkte.

## 7.2.1 Punktweise Lipschitz-Regularität

Die punktweise Regularität einer Funktion wird durch die Abklingordnung ihres Wavelet-Koeffizienten über Skalen charakterisiert. Vergleiche die in Kapitel 3 zitierten Sätze 3.56, 3.57 und 3.58, sowie den dort auch für Morlet-integrierte Wavelets hergestellten Zusammenhang. Die punktweise Lipschitz-Regularität ist nur für kontinuierliche Funktionen definiert. Der Zusammenhang über die Abklingordnung der Wavelet-Koeffizienten, welche auch diskret bestimmt werden kann, erlaubt, die Regularität auch für diskrete Funktionen zu schätzen.

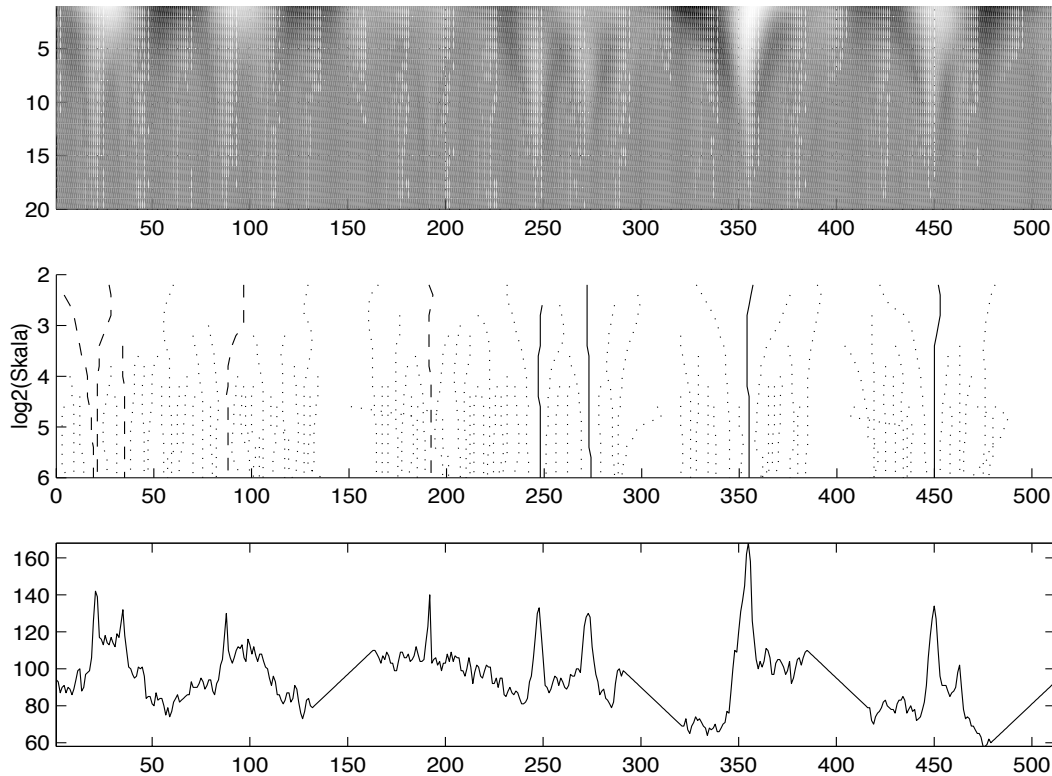
Es stellt sich die Frage, ob auf diese Art Mikrokalk von Artefakten wie z. B. Staub oder Kratzer im Film unterschieden werden kann. Solche Artefakte zeichnen sich durch scharf umrandete Strukturen mit hohem Kontrast aus. Dagegen ist Mikrokalk, zumindest bei hoher Auflösung, glatt.

**Beispiel 7.1** Abbildung 7.2 zeigt die kontinuierliche Wavelet-Analyse eines eindimensionalen Schnitts mit einem Gauß-Wavelet. Dieses besteht aus sechs Schnitten durch Mikrokalk sowie Artefakte in Abbildung 7.1(a). Die zu Artefakten gehörenden Maximalinien des Wavelet-Koeffizienten sind durch gestrichelte Linien markiert, die zu Mikrokalk gehörenden durch durchgezogene Linien.

In Abbildung 7.3 sind die Beträge dieser Maximalinien aufgetragen. Die Achsen sind logarithmisch skaliert, damit ist die Steigung im Bild proportional zur Abklingordnung des Wavelet-Koeffizienten. So erhält man eine Approximation der Lipschitz-Regularität aus dem Betrag der Steigung. Die Wavelet-Koeffizienten sind dazu  $L^1$ -normiert.

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (i) Die Maximalinien in Abbildung 7.2(Mitte) verlaufen im für die Bestimmung der Abklingrate interessanten Bereich der feinen Skalen am unteren Bildrand fast senkrecht. Dies liegt daran, dass dieser Bereich nahe der Abtastrate liegt. Das bedeutet, dass bei der praktischen Umsetzung kein wesentlicher Unterschied zwischen der Betrachtung des Koeffizienten entlang der Maximalinie oder entlang der Senkrechten  $\mathcal{WT}_\psi f(b, \cdot)$  besteht. Die zweite Variante ist numerisch stabiler und schneller, da die aufwendige Verkettung der Maxima über Skalen wegfällt.
- (ii) Die Kurven in Abbildung 7.3 konvergieren für feine Skalen, rechter Bildrand, für alle Koeffizienten gegen die gleiche Steigung, also gleiche Abklingordnung des Wavelet-Koeffizienten. Dies liegt daran, dass das Signal diskret gegeben ist. Damit treten jenseits der der Nyquist-Rate entsprechenden Wavelet-Skala keine feineren Details auf. Die Schätzung der Steigung sollte also auf ausreichend großen Skalen erfolgen.
- (iii) Der Betrag der zu Mikrokalk gehörenden und der zu Artefakten gehörenden Maximalinien in Abbildung 7.3 ist vergleichbar und in beiden Fällen größer als bei Hintergrundstrukturen. Beide Klassen haben daher auch lange Maximalinien.



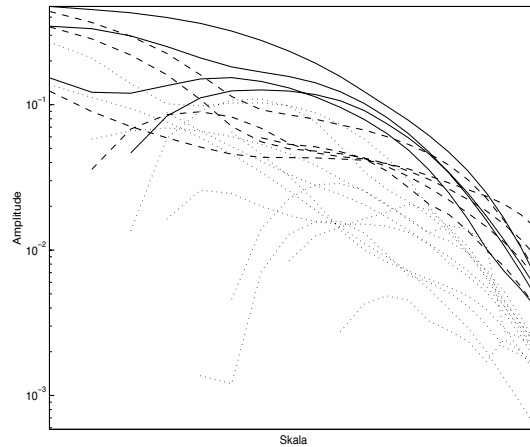
**Abbildung 7.2: Wavelet-Analyse eines Schnitts.** Das Signal  $f$  ist unten dargestellt. Es besteht aus sechs Schnitten durch Mikrokalk sowie Artefakte in Abbildung 7.1(a) und zeigt vier Kratz-Artefakte und vier Mikroverkalkungen. Oben ist die kontinuierliche Wavelet-Analyse  $\mathcal{WT}_\psi f$  mit Gauß-Wavelet dargestellt. Die mittlere Abbildung zeigt das Maxima-Skelett, vgl. Definition 6.2, verbunden über Skalen. Die zu Artefakten gehörenden Maxima-Linien sind durch gestrichelte Linien markiert, die zu Mikrokalk gehörenden durch durchgezogene Linien.

- (iv) Ein Unterschied liegt im Abklingverhalten. Die Steigung der Maxima-Linien in Abbildung 7.3 ist bei Artefakten (gestrichelt) geringer als bei Mikrokalk (durchgezogen). Dies entspricht der erwarteten geringeren Regularität der Artefakte.

□

Der Betrag der Wavelet-Koeffizienten geht in die Lipschitz-Regularität nicht ein, d. h. kleinste Sprünge sind mit großen gleichgestellt. Die punktweise Regularität wird durch Rauschen bestimmt. Eine Trennung zwischen Mikrokalk und Gewebehintergrund anhand der Lipschitz-Regularität ist nicht möglich.

Jedoch zeigt das Beispiel, dass Mikrokalk und Kratz-Artefakte unterschiedliche Lipschitz-



**Abbildung 7.3: Amplitude einiger Wavelet-Koeffizienten entlang Maxima-Linien.** Die Achsen sind logarithmisch skaliert, somit entspricht die Steigung im Bild der Abklingordnung des Wavelet-Koeffizienten. Die zu Artefakten gehörenden Maxima-Linien sind durch gestrichelte Linien markiert, die zu Mikroalk gehörenden durch durchgezogene Linien. Gepunktete Linien zeigen sonstige Pixel. Die Wavelet-Koeffizienten stammen aus Abbildung 7.2.

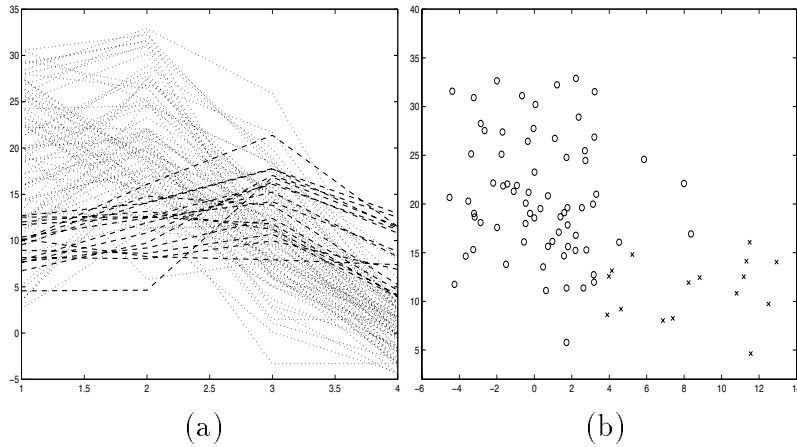
Regulärheit besitzen, also durch das Verhalten der Wavelet-Koeffizienten entlang der Maxima-Linie unterschieden werden können. Dies entspricht dem durch unser Mikroalkmodell prognostizierten Verhalten. Im Gegensatz zu vielen Ansätzen in der Literatur, die Mikroalk mit Kantendetektoren finden, wurde Mikroalk hier gezielt nicht als Kante modelliert.

Der Erfolg dieses Ansatzes hängt auch von der Bildauflösung ab. Bei hoher Auflösung unterscheiden sich Mikroalk und Kratzer deutlich. Dagegen werden Artefakte beim Scannen in geringer Bildauflösung geglättet und sind nachher kaum noch von Mikroalk unterscheidbar. Den gleichen Effekt kann die Rauschfilterung haben.

## 7.2.2 Abklingverhalten

Die Lipschitz-Regularität ist ein auf Wavelet-Koeffizienten berechnetes und durch das Mikroalkmodell motiviertes Merkmal. Wir betrachten nun die Wavelet-Koeffizienten direkt und fragen, ob sich die für die Unterscheidung zwischen Artefakt und Mikroalk notwendige Information direkter und robuster gewinnen lässt als durch Schätzen der Lipschitz-Regularität.

**Beispiel 7.2** Abbildung 7.4(a) zeigt Werte der Wavelet-Koeffizienten aus Abbildung 7.1(a) über vier Skalen. Das Wavelet ist ein Gauß-Wavelet. Die zu Mikroalk gehörenden Linien sind gepunktet, die zu Artefakten gehörenden gestrichelt.



**Abbildung 7.4: Abklingen von Wavelet-Koeffizienten.** (a) Wavelet-Koeffizienten für Mikrokalk und Kratzartefakt über vier Wavelet-Skalen. (b) Die Werte auf Wavelet-Skala 2 und 4 aus Bild (a) sind horizontal und vertikal aufgetragen. Die zu Mikrokalk gehörenden Punkte sind durch Kreise, Artefakte durch Kreuze markiert.

Man erkennt, dass die Steigungen in den beiden Klassen unterschiedlich sind. Während die Unstetigkeiten des Kratz-Artefakts vom Betrag näherungsweise konstante Maxima-Linie besitzen, klingen die zu Mikrokalk gehörenden Koeffizienten über Skalen hinweg ab.

In Abbildung 7.4(b) wurde Skala 2 gegen Skala 4 angetragen. Mikrokalk und Artefakt lassen sich durch eine Gerade gut trennen. Dies kann z. B. durch Fishers lineare Diskriminante als Klassifikator [DH73] erfolgen.  $\square$

Alternativ zur Lipschitz-Regularität oder dem in Abbildung 7.4(b) vorgestellten Merkmal ( $WT_{\psi}f(b, a_2), WT_{\psi}f(b, a_4)$ ) können aus den Koeffizienten andere Merkmale berechnet werden. Ein Beispiel dafür ist [Net98]. Dort werden Maxima über Skalen einer *scale-space* Zerlegung betrachtet und das Maximum und der Betrag der *scale-space* Darstellung an dieser Stelle als Merkmal verwendet. Allerdings geht bei diesem Ansatz zu viel Information verloren. In [Net98] kann mit diesem Merkmal nicht zwischen Artefakt und Mikrokalk unterschieden werden.

In Abschnitt 7.3 wird der Schwerpunkt über Skalen als Merkmal für die Hervorhebung von Mikrokalk verwendet.

### 7.2.3 Skala-Winkel Darstellung

Bisher haben wir Orientierung als Merkmal ignoriert. Diese ist aber wesentlich für die Unterscheidung zwischen Mikrokalk und anderen Strukturen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Wir stellen dazu eine Visualisierung von Wavelet-Koeffizienten mit Richtungsinformation vor. Von J.-P. Antoine et. al. wird in [AM96, AMV99] eine Skala-Winkel-Darstellung (*scale-angle representation*) der kontinuierlichen Wavelet-Transformierten vorgeschlagen. Sie ist für festes  $b \in \mathbb{R}^2$  definiert als Schnitt  $b \times \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  durch die Wavelet-Koeffizienten. Es wird also die gesamte Information über den festen Punkt  $b$  dargestellt. Damit kann aus der Darstellung abgelesen werden, auf welcher Skala welche Richtungsinformation dominiert.

**Beispiel 7.3** Abbildung 7.5 zeigt Skala-Winkel-Darstellungen an einem Testbild. Dargestellt sind die Beträge der Wavelet-Koeffizienten der CWT in Polarkoordinaten in 16 Richtungen auf 12 Skalen. Der innerste Kreis entspricht der feinsten Skala. Die Skalen werden nach außen hin gröber. Als Wavelet wird ein Cauchy-Wavelet verwendet [AM96, AMV99].

Abbildung 7.5(b) zeigt die Skala-Winkel-Darstellung des Kreuzungspunktes im Testbild. In den vier Richtungen der Kreuzung haben die Wavelet-Koeffizienten großen Betrag. Dieser ist über Skalen hinweg etwa auf einem Kreisring mit Radius 4 maximal. Abbildung 7.5(c) zeigt den kleinen Punkt im Testbild links unten. Die Skala-Winkel Darstellung ist wie erwartet isotrop. Abbildung 7.5(d) zeigt den größeren Hügel im Testbild rechts unten. Die Skala-Winkel Darstellung ist ähnlich 7.5(c) isotrop, jedoch wird das Maximum über Skalen auf einer größeren Skala angenommen. Dies entspricht dem größeren Durchmesser des Hügels.  $\square$

**Beispiel 7.4** Abbildung 7.7 stellt Skala-Winkel-Darstellungen typischer Strukturen in Mammographien dar. Abbildung 7.7(a) gehört zu einem Kratz-Artefakt. Die Skala-Winkel-Darstellung zeigt, dass das Artefakt eine gerichtete Struktur auf feinen Skalen ist. Abbildung 7.7(b) gehört zu einer Gewebekreuzung. Man erkennt vier von dem Punkt ausgehende gerichtete Strukturen. Abbildung 7.7(c) gehört zu einer gerichteten Gefäßstruktur, Abbildung 7.7(d) zu Mikrokalk. Dieser ist zwar nicht so schön isotrop wie in den Testbildern Abbildung 7.5(c) und 7.5(d). Trotzdem ist ein deutlicher Unterschied zu der Gewebekreuzung und der gerichteten Gefäßstruktur sichtbar.  $\square$

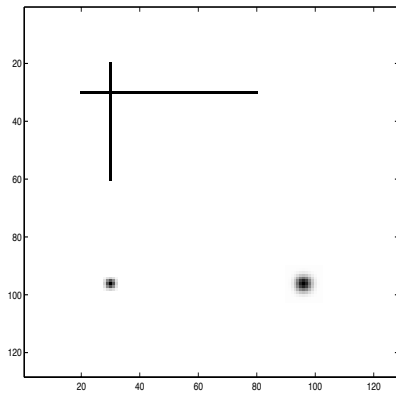
Um die Richtungsinformation zu nutzen, führen wir ein skaleninvariantes Rotationsmaß

$$\mathcal{R}(b, \rho) := \int_{\mathbb{R}_+^*} \mathcal{W}T_\psi f(b, a, \rho) \frac{da}{a}$$

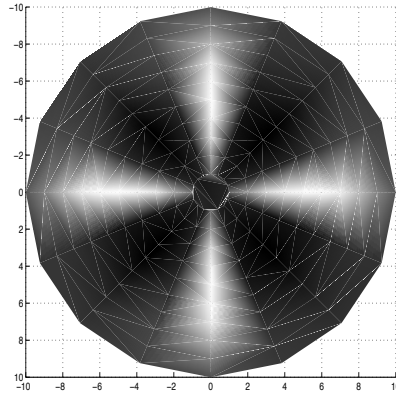
ein. Dieses ist unabhängig von der Skala und gibt an, wie stark eine Funktion im Punkt  $b$  in Richtung  $\rho$  gerichtet ist. Für dieses Rotationsmaß berechnen wird die Autokorrelationsfunktion  $R_{\mathcal{R}}$  bzgl. der Rotation  $\rho$ :

$$R_{\mathcal{R}}(b, \rho) := \int_{SO(2)} \mathcal{R}(b, r) \mathcal{R}(b, r + \rho) dr / \|\mathcal{R}(b, \cdot)\|_2$$

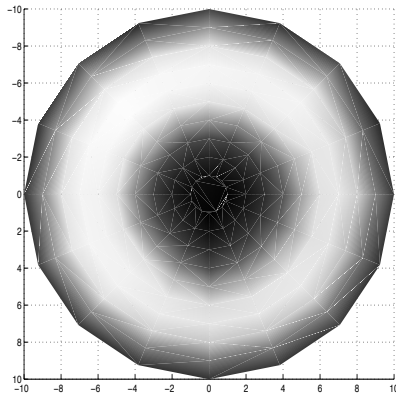
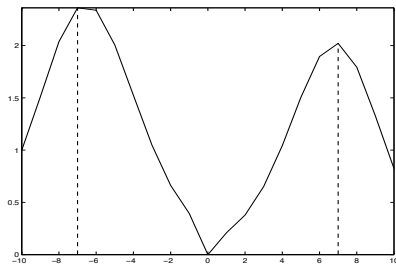
Laut Modell ist Mikrokalk isotrop, die Autokorrelationsfunktion  $R_{\mathcal{R}}$  sollte also näherungsweise konstant sein.



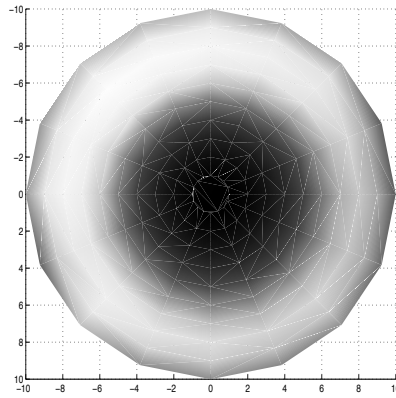
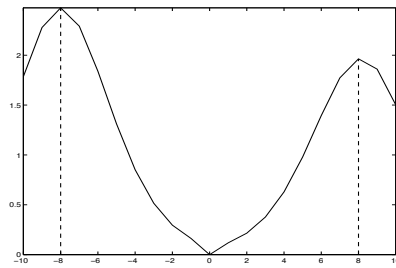
(a)



(b)

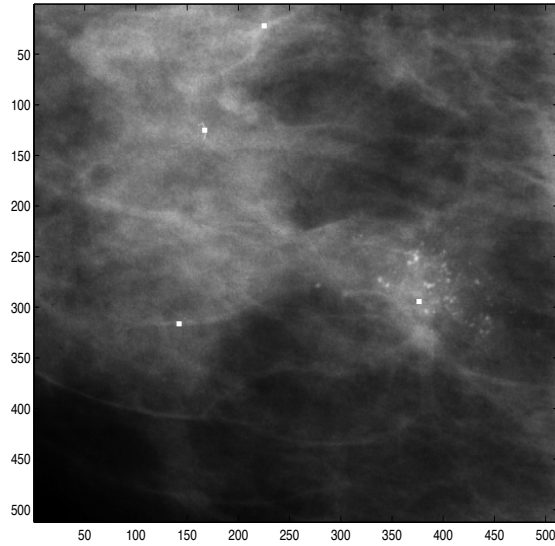


(c)



(d)

**Abbildung 7.5: Skala-Winkel Darstellungen eines Testbildes.** (a) Testbild. (b) Skala-Winkel Darstellung des Kreuzungspunktes in (a). Helle Punkte stehen für große Beträge des Wavelet-Koeffizienten. (c) Skala-Winkel Darstellung des kleinen Punktes in (a). Darüber Querschnitt entlang der  $x$ -Achse. (d) Analog (c) für den großen Hügel in (a). Man erkennt, dass die Extrema über Skalen auf einer Skala weiter außen als in (c) liegenden.



**Abbildung 7.6:** . Ausschnitt aus Abbildung 7.1(a). Markiert sind die Punkte  $b$  für die folgenden Skala-Winkel Darstellungen.

**Beispiel 7.5** Abbildung 7.8 zeigt die Autokorrelationsfunktion  $R_{\mathcal{R}}$  in den Punkten  $b$  aus Abbildung 7.7(a) über 16 Winkel. Der Wert 5 steht für eine Rotation um  $\pi/2$ , der Wert 9 steht für eine Rotation um  $\pi$ . Große Werte der Autokorrelationsfunktion weisen auf Periodizität mit einer dem Winkel entsprechenden Periode hin.

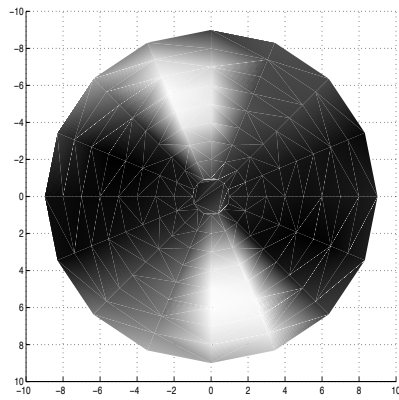
Man erkennt in 7.8(a) und 7.8(c) deutliche Maxima bei Rotation um 0 und  $\pi$ . Dies entspricht der stark linienförmigen Struktur.

Abbildung 7.8(b) weist viele Maxima von geringem Betrag auf. Die zugehörige Gewebekreuzung hat damit keine ausgeprägte Periodizität.

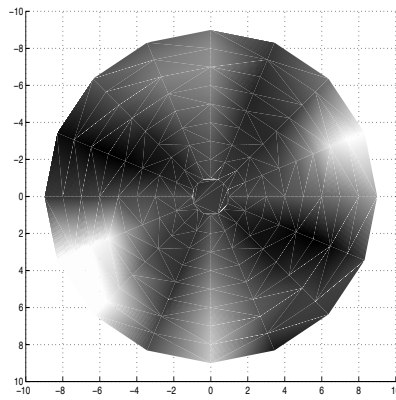
Abbildung 7.8(d) besitzt dagegen eine fast konstante Autokorrelationsfunktion. Dies bedeutet, dass das der Mikrokalk näherungsweise rotationsinvariant ist.  $\square$

Das zweite Beispiel zeigt, dass die in der Wavelet-Transformation enthaltene Richtungsinformation geeignet ist, Gewebekreuzungen und gerichtete Strukturen von Mikrokalk zu unterscheiden. Dies ist mit nur zwei Richtungsfiltern, die den Gradienten schätzen, nicht möglich.

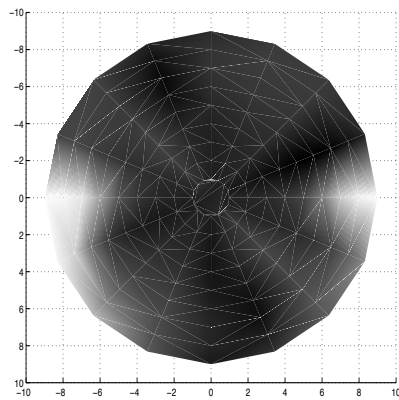




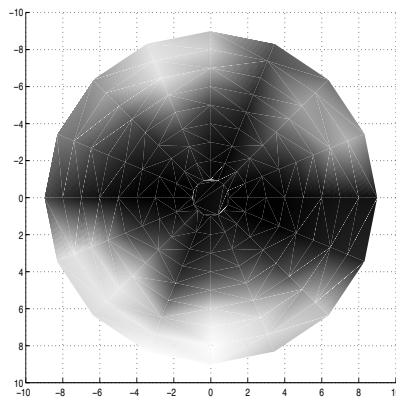
(a)



(b)

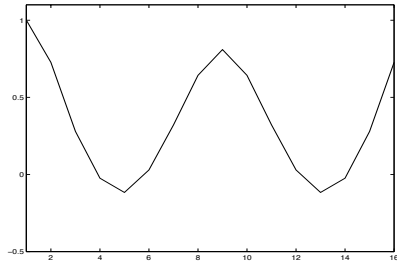


(c)

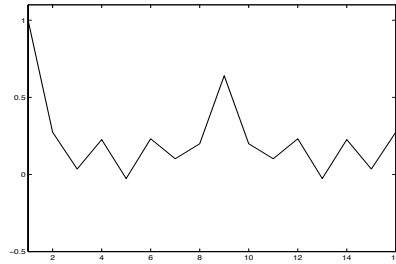


(d)

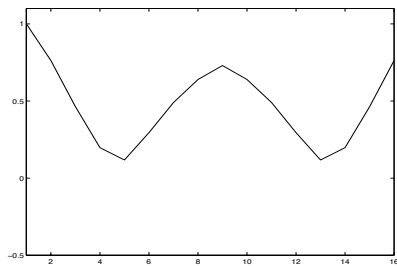
**Abbildung 7.7: Skala-Winkel Darstellungen einer Mammographie.**  
 (a) Artefakt, links mitte (b) Gewebekreuzung, oben (c) Gefäßstruktur, links unten (d) Mikrokalk, rechts.



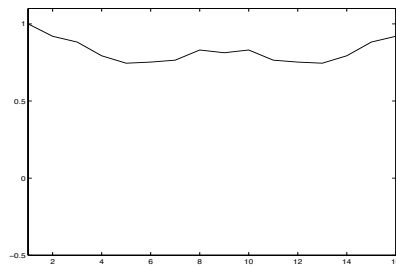
(a)



(b)



(c)



(d)

**Abbildung 7.8: Autokorrelationsfunktion zu den Skala-Winkel Darstellungen.** Dargestellt sind die Autokorrelationsfunktionen bzgl.  $\rho$  des skaleninvarianten Rotationsmaßes  $\mathcal{R}$  zu den Skala-Winkel Darstellungen der Abbildungen 7.7(a)-(d).

## 7.2.4 Normierte Korrelation

M. Duval-Destin untersucht in seiner Dissertation [DD91] die Verarbeitung visueller Reize durch unser Gehirn und findet dabei Analogien zu Wavelet-Zerlegungen. Er verwendet Wavelets auch zur Definition eines lokalen Kontrast-Begriffes, den wir im folgenden Nutzen.

Ein Problem bei Betrachtung der Wavelet-Koeffizienten als angepasstes Filter ist, dass Korrelation mit dem gesuchten Muster und Intensität des Signales vermischt sind. Da Mikrokalk aber mit starken Intensitätsunterschieden auftritt, besteht Interesse an einem Merkmal, welches Intensität und Korrelation trennt. Wir zeigen, dass sich der lokale Kontrast dafür sehr gut eignet.

**Definition 7.6** Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  ein Wavelet und  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  die assoziierte Skalierungsfunktion. Der lokale Kontrast  $C_a(f)(b)$  von  $f$  im Punkt  $b$  zur Skala  $a$  ist definiert durch

$$C_a(f)(b) := \frac{\langle f, U_{(b,a)}\psi \rangle}{\langle f, U_{(b,a)}\varphi \rangle}. \quad (7.1)$$

Dies kann als Vergleich des Anteils in Skala  $a$  (Zähler) zu dem niederfrequenten Hintergrund (Nenner) interpretiert werden. Der Kontrast ist um so größer, je größer der Wavelet-Koeffizient der Skala  $a$  im Vergleich zum Hintergrund ist. Wesentlicher Vorteil dieses Maßes ist, dass es eine lokale Kontrastaussage liefert. Der Grad der Lokalisierung wird durch den Skalenparameter  $a$  gesteuert.

Wir betrachten eine zweite, für uns nützliche Interpretation als *normierte Korrelation*. Der Wavelet-Koeffizient beschreibt die Korrelation mit dem angepassten Filter, aber gewichtet mit der Intensität des Signales. Durch obige Division fällt die Skalierung von  $f$  heraus,  $C_a(f)$  ist homogen.

**Bemerkung 7.7** Für (Morlet-) integrierte Wavelets kann der lokale Kontrast definiert werden durch

$$C_{a_j}(f)(b) := \frac{\langle f, T_b\Psi^j \rangle}{\langle f, U_{(b,a_j)}\varphi \rangle} = \frac{\langle f, T_b\Psi^j \rangle}{\sum_{i=0}^{j-1} \langle f, T_b\Psi^i \rangle}. \quad (7.2)$$

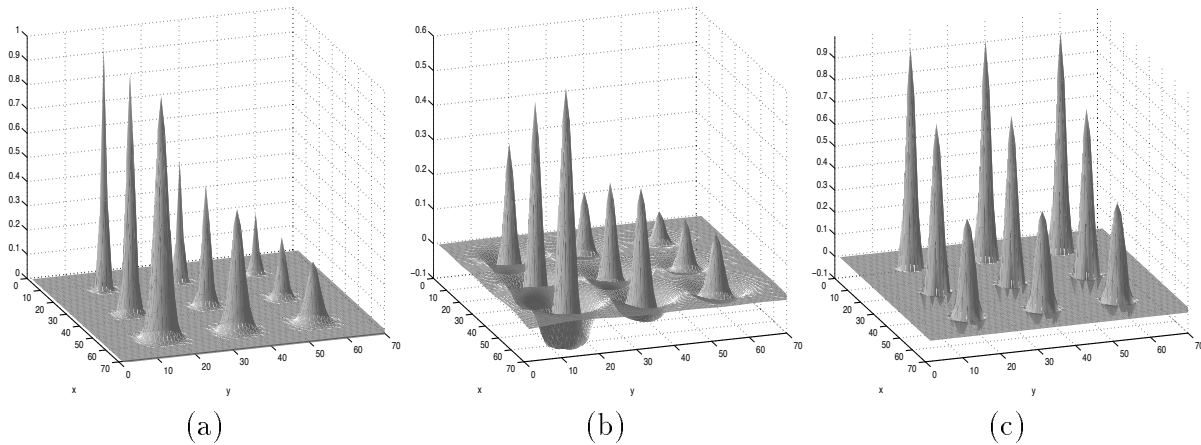
Dies gilt mit

$$\langle f, U_{(b,a_j)}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{a_j} \langle f, U_{(b,a')}\psi \rangle \frac{da'}{a'} = \sum_{i=0}^{j-1} \langle f, T_b\Psi^i \rangle.$$

Damit kann  $C_a(f)$  leicht aus der integrierten Wavelet-Transformation berechnet werden.  $\square$

**Bemerkung 7.8** Es gibt ein Problem bei der Division, falls der Nenner nahe oder gleich Null ist. Daher wird die Division nur für Werte durchgeführt, für die gilt  $|\langle f, U_{(b,a_j)}\varphi \rangle| > \varepsilon |\langle f, U_{(b,a)}\psi \rangle|$  mit festem  $\varepsilon > 0$ . Restliche Werte von  $C_a$  werden Null gesetzt. Für die Detektion von Mikrokalk ist dies ohne Bedeutung, da dort die Wavelet-Koeffizienten großen Betrag haben, also sicher von Null verschieden sind.  $\square$

**Beispiel 7.9** Abbildung 7.9(a) zeigt ein Beispielbild  $f$  mit verschiedenen Gauß-Hügeln. Das Wavelet hat denselben Durchmesser wie der kleinste Hügel. Deren Durchmesser nimmt in  $x$ -Richtung bei konstantem maximalen Betrag zu. In  $y$ -Richtung ist der Durchmesser konstant, der Betrag nimmt ab. In Abbildung 7.9(b) ist eine Wavelet-Skala  $WT_{\psi}f$  von (a) dargestellt. Abbildung 7.9(c) zeigt den lokalen Kontrast  $C_a f$  zu der Skala. Werte kleiner  $-0.1$  wurden auf Null gesetzt.



**Abbildung 7.9: Normierte Korrelation.** (a) Ein Testbild aus Gauß-Hügeln mit in  $x$ -Richtung wachsendem Durchmesser bei konstanter maximaler Intensität und in  $y$ -Richtung fallender Intensität. (b) Eine Wavelet-Skala  $WT_{\psi}f(\cdot, a_0)$  von (a). (c) Der lokale Kontrast  $C_{a_0}(f)$  auf der Skala  $a_0$  aus (b).

Wir beobachten:

- (i) Der Betrag der Maxima des Wavelet-Koeffizienten in 7.9(b) nimmt in  $x$ -Richtung zu. Dies liegt daran, dass die  $L^2$ -Norm der Hügel in 7.9(a) mit dem Durchmesser in  $x$ -Richtung stärker wächst, als die ( $L^2$ -Norm-bereinigte) Korrelation mit dem Wavelet abnimmt.
- (ii) Der Betrag der Maxima des Wavelet-Koeffizienten in 7.9(b) ist in  $y$ -Richtung proportional dem Original (a). Dies folgt direkt aus der Linearität der Wavelet-Transformation.

Damit sind die Korrelation mit dem Wavelet und die Intensität des Signales im Wavelet-Koeffizienten vermischt.

- (iii) Der Betrag der Maxima des lokalen Kontrastes  $C_a f$  in Abbildung 7.9(c) ist in  $x$ -Richtung fallend. Die Beträge entsprechen der Korrelation mit dem Wavelet der Skala. Das Wavelet hat denselben Durchmesser wie der kleinste Hügel. Damit ist die Korrelation auf der hinteren Reihe am größten. Entsprechend fallen die Maxima in  $x$ -Richtung.

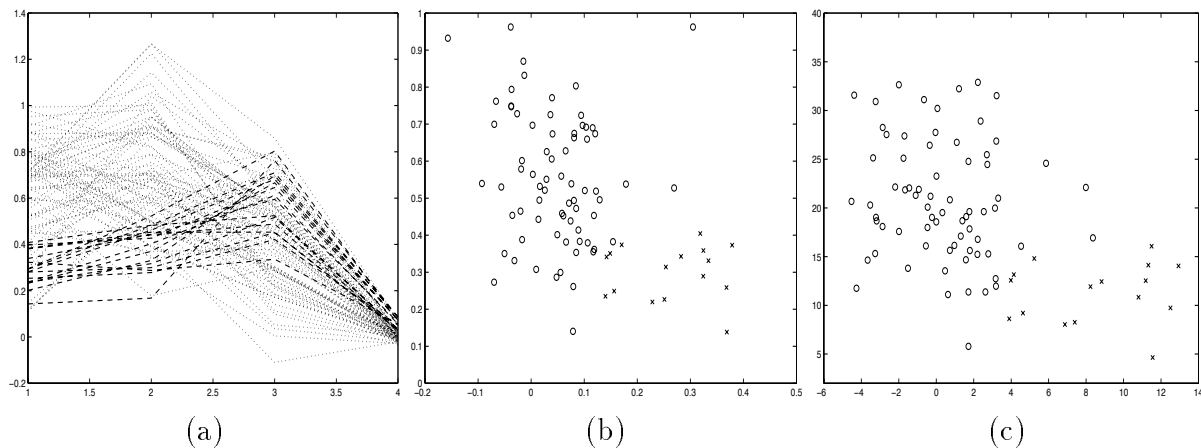
(iv) Der Betrag der Maxima des lokalen Kontrastes  $C_a f$  in Abbildung 7.9(c) ist in  $y$ -Richtung konstant. Damit ist die, im Original in  $y$ -Richtung variierende, Intensität des Signales herausnormiert.

Der lokale Kontrast  $C_a f$  ist also ein intensitätsinvariantes Maß für die Korrelation mit dem Wavelet.

□

**Beispiel 7.10** Abbildung 7.10 zeigt die Anwendung des lokalen Kontrastes auf eine Mammographie. Analog zu Abbildung 7.4 sind in Abbildung 7.10(a) die lokalen Kontrastwerte  $C_a f$  für Mikrokalk und Kratzartefakt über vier Wavelet-Skalen angetragen.

Für Abbildung 7.10(b) wurden die Werte auf Wavelet-Skala 1 und 3 aus Bild (a) horizontal und vertikal aufgetragen. Die zu Mikrokalk gehörenden Punkte sind durch Kreise, Artefakte durch Kreuze markiert.



**Abbildung 7.10: Abklingordnung von Kontrast-Koeffizienten.** (a) Lokale Kontrastwerte  $C_a f$  für Mikrokalk MC und Kratzartefakt über vier Wavelet-Skalen. (b) Die lokalen Kontrastwerte zu Skala 1 und 3 aus Bild (a) sind horizontal und vertikal aufgetragen. Die zu Mikrokalk gehörenden Punkte sind durch Kreise, Artefakte durch Kreuze markiert. (c) Zum Vergleich Abbildung 7.4 mit Wavelet-Koeffizienten über Skalen.

Im Vergleich zu Beispiel 7.2 hat sich die Trennschärfe nur unwesentlich verändert. Dafür ist die Ausdehnung der Klassen jeweils auf einen kleineren Raum geschrumpft. Dies ergibt sich durch die Skalierungsinvarianz des lokalen Kontrastes.

Damit führt der lokale Kontrast auf eine gegenüber Intensitätsschwankungen im Bild robustere Darstellung.

□

## 7.3 Hervorhebung von Mikrokalk mit skalenübergreifendem Operator

In Kapitel 6 wurde darauf hingewiesen, dass skalenweise Enhancement-Operatoren die Vorteile der Wavelet-Transformation nicht voll ausnutzen. Schwerpunkt der Diskussion in den Beispielen in Abschnitt 6.9 war der Vorteil integrierter Wavelet-Frames über klassischen Diskretisierungen. Ich habe dort jedoch keinen skalenübergreifenden Operator vorgestellt. Dies soll hier, die Ergebnisse des letzten Abschnitts 7.2 nutzend, nachgeholt werden. Dazu wird der Operator zur Spot-Hervorhebung aus Abschnitt 6.9.3 modifiziert.

**Definition 7.11** Sei ein Gewichtungsfaktor  $S > 0$  gegeben. Als **Mikrokalk-Hervorhebung** bezeichnen wir den Operator  $MC : l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$ ,

$$MC(F)(b, j, l) := \begin{cases} (1 + S \mathcal{M}_j(b) K_j) F(b, j, l) & \text{falls } \mathcal{M}_j(b) > T_j \text{ und } 0 < j < j_{max}, \\ F(b, j, l) & \text{falls } \mathcal{M}_j(b) \leq T_j, \end{cases}$$

wobei  $F \in l^2(\Gamma)$  und  $(b, j) \in \Gamma$ .

Der Schwellwert  $T_j$  und das Gewicht  $K_j$  sind wie in Definition 6.17 zur Spot-Hervorhebung zu wählen. Für die Gewichtsfunktion  $\mathcal{M}_j$  betrachten wir zwei Varianten:

$$(i) \quad \mathcal{M}_j(b) := \begin{cases} M_j(b) & \text{falls } 2 < \mathcal{S}(WT_\psi(f)(b, \cdot)) < 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \mathcal{M}_j(b) := \begin{cases} M_j(b) & \text{falls } 2 < \mathcal{S}(WT_\psi(f)(b, \cdot)) < 3 \\ & \text{und } C_{a_1}(f) + C_{a_2}(f) > 0.2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $M_j$  die Gewichtsfunktion aus Definition 6.17.

$\mathcal{S}((x_1, \dots, x_n)) := \left( \sum_{j=1}^n j x_j \right) / \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)$  bezeichnet den Schwerpunkt über Skalen.

Der Operator unterscheidet sich von der Spot-Hervorhebung also durch eine, durch Hinzufügen weiterer Merkmale ausgedünnte Maske  $\mathcal{M}_j$ .

Motivation für den Schwerpunkt  $\mathcal{S}$  über Skalen sind die Betrachtungen zum Abklingverhalten in Abschnitt 7.2.2. Der Schwerpunkt soll Mikrokalk von Kratz-Artefakten trennen. Der lokale Kontrast  $C_a$  ist durch Abschnitt 7.2.4 motiviert. Es werden nur noch Punkte mit positiver normierter Korrelation hervorgehoben. Der geringe Schwellwert von 0,2 ist notwendig, da Mikrokalkherde in der Praxis deutlich vom modellierten Gauß-Signal abweichen.

**Bemerkung 7.12** Dieser Ansatz kann sicher verfeinert werden. Der Operator  $MC$  soll nur das Prinzip demonstrieren, dass skalenübergreifende Information für die Hervorhebung vorteilhaft ist.

Die Schwellwert-Konstruktion  $\mathcal{M}_j(b) > T_j$  ist ein explizit als Funktion konstruierter Klassifikator. Die implizit verwendete Klassifikation durch die Maske  $\mathcal{M}_j$ , definiert im Merkmalraum einen Quader, da die Merkmale logisch und-verknüpft werden. So kann insbesondere kleiner Mikrokalk schnell übersehen werden, wenn er nur eines der Kriterien nicht erfüllt. Solche Konstruktionen werden in der Mustererkennung üblicherweise abgelehnt. Stattdessen werden die in die Berechnung von  $\mathcal{M}_j$  eingehenden Komponenten als Merkmalsvektor zusammengefasst und Standard-Klassifikatoren, wie in Abschnitt 5.3.3 vorgestellt, mit geeigneter Flexibilität verwendet. Diese lassen sich anhand von Testdaten einstellen bzw. trainieren und sind „handgestrickten“ Funktionen im allgemeinen überlegen.  $\square$

**Beispiel 7.13** Abbildung 7.11 zeigt ein Beispiel. 7.11(a) zeigt einen Ausschnitt aus Abbildung 7.1(a). In 7.11(b) ist zum Vergleich die Spot-Hervorhebung mit integriertem Gauß-Wavelet wie in Beispiel 6.19 dargestellt.

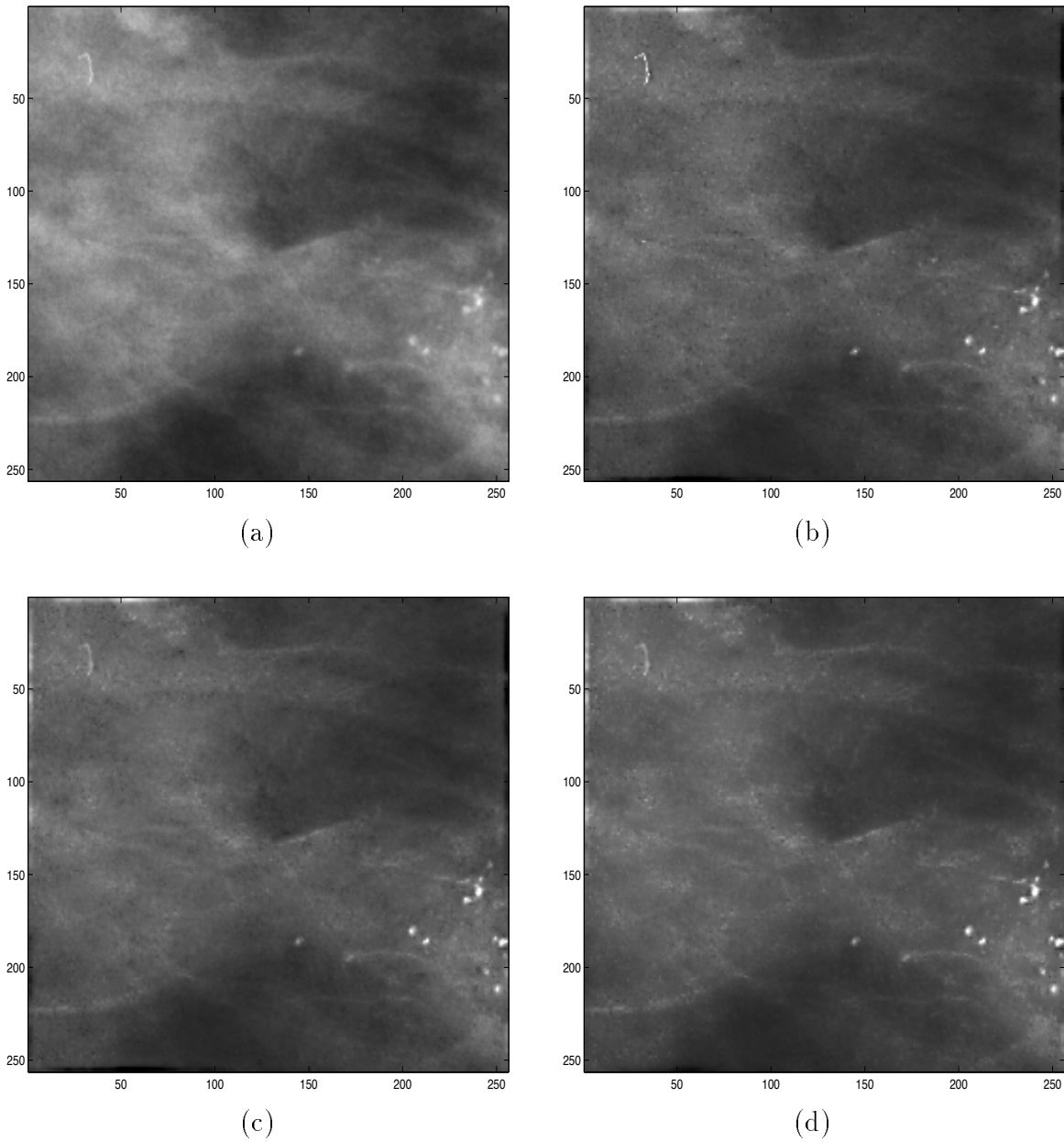
Abbildung 7.11(c) zeigt die Hervorhebung von Mikrokalk mit dem Operator  $MC$  nach Definition 7.11(i), Abbildung 7.11(d) die Hervorhebung nach Definition 7.11(ii).

Wir machen folgende Beobachtungen:

- (i) Die Spot-Hervorhebung in Abbildung 7.11(b) verstärkt neben Mikrokalk auch das Artefakt links oben im Bild.
- (ii) Der Kontrast ist in 7.11(c) nur unwesentlich besser als im Vergleichsbild 7.11(b) mit Spot-Hervorhebung. Aber das Artefakt wird nicht mehr hervorgehoben. Dies liegt an der Schwerpunkt-Bedingung. Dieser liegt für das Artefakt, vergleiche Abschnitt 7.2.2, auf einer kleineren Skala.
- (iii) Der Kontrast ist in 7.11(d) besser als in 7.11(c). Dies lässt sich durch die verwendete normierte Korrelation begründen. Die großen Kalkherde am rechten Bildrand haben nur geringe Korrelation mit dem kleineren Wavelet. Während dies bei Wavelet-Koeffizienten durch die große Intensität der Kalkherde ausgeglichen wird, fällt das Maß  $C_a(f)$  unter den in Definition 7.11(ii) eingeführten Schwellwert. Damit wird kleiner Mikrokalk im Vergleich zu großen Verkalkungen stärker angehoben, die mittlere Kontrastverbesserung nimmt zu.

$\square$

Das Beispiel demonstriert den Nutzen der skalenübergreifenden Information für die Hervorhebung von Mikrokalk. In Abschnitt 6.4 wurden zwei Sichtweisen auf die verwendete Filterbank diskutiert: Zum einen gibt es die Interpretation als angepasstes Filter mit skalenweisen Merkmalen wie Maxima innerhalb einer Skala. Zum anderen erlaubt die



**Abbildung 7.11: Skalenübergreifende Hervorhebung.** (a) Ausschnitt aus Abbildung 7.1(a). (b) Spot-Hervorhebung mit integriertem Gauß-Wavelet wie in Beispiel 6.19. (c) Hervorhebung von Mikrokalk mit dem Operator aus Definition 7.11(i) und (d) mit dem Operator aus Definition 7.11(ii). Die Kontrastverbesserung, definiert wie in Tabelle 6.2, beträgt (a) 1, (b) 1,84, (c) 1,88, (d) 2,07. In (c) und (d) wird das Kratzartefakt links oben nicht hervorgehoben.



Interpretation als Wavelet-Koeffizient skalenübergreifende Merkmale wie Lipschitzregularität und Abklingordnung. Die in diesem Beispiel demonstrierte Kombination beider Sichtweisen führt zu den einzelnen Methoden überlegenen Resultaten.

Damit werden in dieser Arbeit alle Komponenten der Hervorhebung in Frames, wie sie in Abschnitt 6.3 beschrieben wurden, optimiert: In Abschnitt 6.9.3 wurde mit der integrierten Wavelet-Transformation eine problemangepasste Diskretisierung der Wavelet-Transformation eingeführt. Weiter wird das Gauß-Wavelet als an Mikrokalk angepasstes Filter verwendet. Weiter erlaubt die Morlet-Rekonstruktion eine schnelle Synthese des Bildes. In diesem Abschnitt wurde abschließend ein durch die Wavelet-Theorie motivierter verbesserter Enhancement-Operator  $E$  entwickelt.



# Anhang A

## A.1 Fourier-Transformation

Die **Fourier-Transformation**  $\mathcal{F}$  auf  $L^1(\mathbb{R}^m)$  ist definiert durch

$$\widehat{\mathcal{F}f}(\omega) := \hat{f}(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx, \quad \forall \omega \in \widehat{\mathbb{R}^m}.$$

Die Fourier-Transformation (auch **Plancherel-Transformation**)  $\mathcal{F}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  ist gegeben durch die eindeutige stetige Fortsetzung von  $\mathcal{F}$  auf der dichten Teilmenge  $L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie zwischen  $L^2(\mathbb{R}^m)$  und  $L^2(\widehat{\mathbb{R}^m})$  (Plancherel-Identität). Ihre Inverse ist durch den adjungierten Operator gegeben  $\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^*f = \mathcal{F}(\tilde{f})$ ,  $f \in L^2(\widehat{\mathbb{R}^m})$ . Die **Parseval-Formel** lautet für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^m)$ :  $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ .

Für die in Kapitel 1 eingeführten Operatoren gelten die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}T_b &= E_b \mathcal{F}, & b \in \mathbb{R}^m \\ \mathcal{F}\mathcal{D}_a &= \mathcal{D}_{1/a} \mathcal{F}, & a > 0 \\ \mathcal{F}R_\rho &= R_{-\rho} \mathcal{F}, & \rho \in SO(m) \\ \mathcal{F}\tilde{f} &= \overline{\mathcal{F}f}, & f \in L^2(\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $E_b f(\omega) := e^{-ib \cdot \omega} f(\omega)$  die **Modulation** auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Die **Faltung** für  $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$  und  $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$  ist gegeben durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(y) g(x - y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Es gilt  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ . Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und  $g \in L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)$  gilt dann der **Faltungssatz**

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{-m/2} \mathcal{F}f \mathcal{F}g.$$

**Lemma A.1** (i) Falls  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , dann folgt  $i\omega\hat{f}(\omega) = \widehat{f}'(\omega)$ .

(ii) Falls  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $F(x) := x \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , dann ist  $\hat{f}$  differenzierbar und es gilt  $(\hat{f})'(\omega) = -i\widehat{F}(\omega)$ .

(iii) Falls  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , dann ist  $\omega\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ .

(iv) Falls  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $x \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , dann ist  $(\hat{f})' \in L^2(\mathbb{R})$ .

Auf  $L^1([-\pi, \pi]^m)$  ist die **Fourier-Reihe** definiert durch

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{[-\pi, \pi]^m} f(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m.$$

Die Rekonstruktion für  $f \in l^2(\mathbb{Z}^k)$  ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Für  $L^2([-\pi, \pi]^m) \subset L^1([-\pi, \pi]^m)$  gilt die Plancherel-Identität  $\|f\|_{L^2([-\pi, \pi]^m)} = \|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^m)}$ . Die Parseval-Formel lautet  $\langle f, g \rangle_{L^2([-\pi, \pi]^m)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^m)}$ .

**Satz A.2 (Summationsformel von Poisson)** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Weiter sei  $F(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$  definiert für jene  $x \in [-\pi, \pi]$ , für die der Grenzwert existiert. Dann gelten

(i) Die Reihe  $F(x)$  konvergiert absolut für fast alle  $x \in [-\pi, \pi]$  und es gilt  $F \in L^1(-\pi, \pi)$  mit  $\|F\|_{L^1(-\pi, \pi)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$

(ii) Es gilt  $\hat{F}(n) = \mathcal{F}f(n)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

(iii) Für  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$  gilt

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

## A.2 Begriffe der Zeitreihenanalyse

Reale Daten führen zwingend auf ein stochastisches Modell des Signales als eine Realisierung eines mit Rauschen überlagerten Prozesses. Die stochastische Modellierung ist Grundlage für Methoden, um Rauschen zu entfernen. Wir führen dazu Grundbegriffe ein.

**Definition A.3** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeits-Raum.

Sei  $(S, \mathcal{S})$  ein Meß-Raum mit  $S$  vollständig separabler metrischer Raum und  $\mathcal{S}$  Borel'sche  $\sigma$ -Algebra über  $S$ . Dann heißt eine messbare Abbildung  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$  **zufälliges Element** von  $S$ . Die **Verteilung** von  $X$  ist das durch  $P \circ X^{-1}$  definierte Wahrscheinlichkeits-Maß auf  $(S, \mathcal{S})$ .

Ist  $S = \mathbb{R}$ , so heißt  $X$  **reelle Zufallsvariable**. Ist  $S = \mathbb{R}^\infty$ , so heißt  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  **stochastischer Prozess in diskreter Zeit**. Ist  $S = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , so heißt  $X := (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  **stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden in  $\mathbb{R}$** .

Nach dem Konsistenzsatz von Kolmogorov ist die Verteilung eines stochastischen Prozesses  $X = (X_t)_{t \in T}$  unter obigen Forderungen an  $S$  eindeutig durch die Verteilungen  $X_t$  bestimmt. Dies gilt für beliebige, auch kontinuierliche Indexmengen  $T$ .

Im folgenden ist  $T$  eine Indexmenge mit additiver Struktur, z. B.  $T = \mathbb{Z}^m$  oder  $T = \mathbb{R}^m$ .

**Definition A.4** Sei  $X = (X_t)_{t \in T}$  ein stochastischer Prozess und  $X_t < \infty$  für alle  $t \in T$ . Der **Erwartungswert** (auch ensemble average) von  $X$  ist  $E(X) := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$ .

Die **Autokovarianz** von  $X$  ist definiert als

$$\gamma_X(r, s) := \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], \quad r, s \in T.$$

Der Prozess  $X$  heißt **schwach stationär**, falls gelten

- (i)  $E|X_t|^2 < \infty, \quad \forall t \in T$
- (ii)  $E(X_t) = \mu, \quad \forall t \in T$
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + h, s + h), \quad \forall r, s, h \in T$

Wir schreiben dann  $\gamma_X(h) := \gamma_X(h, 0)$ .

Die **Korrelation** ist definiert als

$$\rho_X(s, t) := \frac{\text{cov}(X_s, X_t)}{\sqrt{\text{var } X_s \text{var } X_t}}.$$

Für einen schwach stationären stochastischen Prozess ist die **Autokorrelation** gegeben durch

$$\rho_X(h) := \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

**Beispiel A.5** Sei  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ein schwach stationärer stochastischer Prozess mit  $E(X_t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{Z}$ . Falls für die Autokovarianz gilt

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_X^2 & h = 0, \\ 0 & h \neq 0, \end{cases}$$

dann heißt  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  **weißes Rauschen** (*white noise*) mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma_X^2$ . □

Man kann zeigen, dass die Menge der Autokorrelationsfunktionen schwach stationärer stochastischer Prozesse  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  genau die Menge der nichtnegativ definiten Funktionen  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Das erlaubt mit dem folgenden Satz eine Spektraldarstellung stationärer Prozesse.

**Satz A.6** (Bochner-Herglotz) *Es sind äquivalent:*

- (i)  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist nichtnegativ-definit
- (ii)  $\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\gamma} dF(\gamma)$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ , wobei  $F$  rechtsseitig stetige, nichtfallende, beschränkte Funktion auf  $[-\pi, \pi]$  ist, mit  $F(-\pi) = 0$  (Maßdefinierende Funktion).

Die Funktion  $F$  heißt **Spektralverteilungsfunktion** (power spectrum). Falls  $F$  eine Lebesgue-Dichte  $f$  besitzt, heißt  $f$  **Spektraldichte** von  $\gamma$ .

**Definition A.7** Die **Autokovarianzfunktion** von  $f \in L^1(\mathbb{R})$  lautet

$$R_f(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)f(x+t)dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Autokovarianzfunktion einer Realisierung  $X(., \omega)$  eines stochastischen Prozesses  $X$  kann als einfacher Schätzer für die Autokovarianz betrachtet werden.

**Definition A.8** Ein schwach stationärer stochastischer Prozess heißt **ergodisch**, falls gelten

- (i)  $E(X(t)) = c_1$  unabhängig von  $t \in \mathbb{R}$
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}} X(t, \omega)dt = c_2$  für fast alle  $\omega \in \Omega$
- (iii)  $E(X(t)) = \int_{\mathbb{R}} X(t, \omega)dt$

Für einen ergodischen Prozess  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ist die Autokovarianzfunktion von  $X(., \omega)$  unabhängig von der Realisierung  $\omega \in \Omega$  und identisch zur Autokovarianz. Ein ergodischer Prozess  $X$  wird durch die Autokovarianzfunktion einer Realisierung bereits charakterisiert.

# Literaturverzeichnis

- [ACMP93] J.-P. Antoine, P. Carette, R. Murenzi, und B. Piette. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform. *Signal Processing*, 31: 241–272, 1993.
- [AHB<sup>+</sup>93] S. Astley, I. Hutt, C. Boggis, et al. Automation in mammography: Computer vision an human perception. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1313–1338, 1993.
- [AM96] J.-P. Antoine und R. Murenzi. Two-dimensional directional wavelets and the scale-angle representation. *Signal Processing*, 52: 259–281, 1996.
- [AMV99] J.-P. Antoine, R. Murenzi, und P. Vandergheynst. Directional wavelets revisited: Cauchy wavelets and symmetry detection in patterns. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6: 314–345, 1999.
- [Ant98] J.-P. Antoine. The continuous wavelet transform in image processing. Preprint, 1998.
- [AU96] A. Aldroubi und M. Unser. *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, New York, 1996.
- [BGH93] H. Barman, G. Granlund, und L. Haglund. Feature extraction for computer-aided analysis of mammograms. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1339–1356, 1993.
- [Bic96] U. Bick. Computerassistierte diagnose in der screeningmammographie. *Radiologie*, 36: 72–80, 1996.
- [BN93] D. Brzakovic und M. Neskovic. Mammogram screening using multiresolution-based image segmentation. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1437–1460, 1993.
- [BP96] G. Boccignone und A. Picariello. Enhancement of mammograms: Experimental results. *ICIP*, S. 347–350, 1996.
- [BS99] P. L. Butzer und R. L. Stens. An introduction to sampling analysis. Preprint, 1999.

- [Cas96] K. R. Castleman. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [CDM93] Y. Chitre, A. P. Dhawan, und M. Moskowitz. Artificial neural network based classification of mammographic microcalcifications using image structure features. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1377–1401, 1993.
- [CHT97] R. A. Carmona, W. L. Hwang, und B. Torrèsani. Charakterization of signals by the ridges of their wavelet transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45 (10) : 2586–2591, Oktober 1997.
- [CHT99] R. A. Carmona, W. L. Hwang, und B. Torrèsani. Multiridge detection and time-frequency reconstruction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47 (2) : 480–492, Februar 1999.
- [CKQ<sup>+</sup>94] L. P. Clarke, M. Kallergi, W. Qian, H. D. Li, R. A. Clark, und M. L. Silbiger. Tree-structured non-linear filter and wavelet transform for microcalcification segmentation in digital mammography. *Cancer Letters*, 77: 173–181, 1994.
- [CW95] R. R. Coifman und M. V. Wickerhauser. Adapted waveform “de-noising” for medical signals and images. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 14 (5) : 578–586, 1995.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [DD91] M. Duval-Destin. *Analyse spatiale et spato-temporelle de la stimulation visuelle a l’aide de la transformee en ondelettes*. PhD thesis, Universite d’Aix-Marseille II, Marseille, Frankreich, 1991.
- [DDMT93] M. Duval-Destin, M. A. Muschietti, und B. Torr sani. Continuous wavelet decompositions, multiresolution, and contrast analysis. *SIAM J. Math. Anal.*, 24 (3) : 739–755, Mai 1993.
- [DEG<sup>+</sup>92] N. Delprat, B. Escudie, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, und B. Torrèsani. Asymptotic wavelet and gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38 (2) , März 1992.
- [DH73] R. Duda und P. Hart. *Pattern classification and scene analysis*. John Wiley & Sons, USA, 1973.
- [DJ94] D. Donoho und I. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81: 425–455, 1994.
- [DM76] M. Dufflo und C.C. Moore. On the regular representation of a nonunimodular locally compact group. *J. Functional Analysis*, 21: 209–243, 1976.



- [DS52] R. Duffin und S. Schaeffer. A class of nonharmonic fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72: 341–366, 1952.
- [EHJ96] G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, und L. Jameson. *Wavelets – Theory and Applications*. Oxford University Press, New York, 1996.
- [Ewe98] K. Ewen. *Moderne Bildgebung: Physik, Gerätetechnik, Bildbearbeitung und -kommunikation, Strahlenschutz, Qualitätskontrolle*. Thieme Verlag, Stuttgart, 1998.
- [Fie99] D. J. Field. Wavelets, vision and the statistics of natural scenes. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 357 (1760) : 2527–2542, 1999.
- [Fol95] G. B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [Füh97] H. Führ. *Zur Konstruktion von Wavelettransformationen in höheren Dimensionen*. Dissertation, TU München, München, 1997.
- [GM84] A. Grossmann und J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15: 723–736, 1984.
- [GT94] C. Gonnet und B. Torrèsani. Local frequency analysis with two-dimensional wavelet transform. *Signal Processing*, 37: 389–404, 1994.
- [GYCA96] M. N. G rcan, Y. Yardimci, A. E. Cetin, und R. Ansari. Automated detection and enhancement of microcalcifications in mammograms using nonlinear subband decomposition. Preprint, 1996.
- [HB99] R. P. Highnam und M. Brady. *Mammographic Image Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [Hei98] P. Heinlein. Lipschitz-Regularität und Wavelet-Koeffizienten. Diplomarbeit, TU München, München, 1998.
- [HK+96] S. Heywang-K obrunner et al. *Bildgebende Mammadiagnostik: Untersuchungstechnik, Befundmuster und Differentialdiagnostik in Mammographie, Sonographie und Kernspintomographie*. Thieme Verlag, Stuttgart, 1996.
- [Hol95] M. Holschneider. *Wavelets – An Analysis Tool*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [HR63] E. Hewitt und K. A. Ross. *Abstract harmonic analysis I*. Springer Verlag, Berlin, 1963.

- [HT89] M. Holschneider und Ph. Tchamitchian. *Regularité locale de la fonction non-differentiable de Riemann*, S. 102–125. Springer-Verlag, 1989. In: Les ondelettes en 1989, Lecture notes in Mathematics, Editor P. G. Lemarie.
- [HW89] C. E. Heil und D. F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31 (4) : 628–666, Dezember 1989.
- [Jaf89] S. Jaffard. Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d’ondelettes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I* (t. 208) : 79–81, 1989.
- [Jai89] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [JDM00] A. K. Jain, R. P. W. Duin, und J. Mao. Statistical pattern recognition: A review. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22 (1) : 4–37, Januar 2000.
- [JS97] I. Johnstone und B. Silverman. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *J. R. Statist. Soc. B*, 59: 319–351, 1997.
- [Kah70] J.-P. Kahane. *Series des Fourier absolument convergente*, Band Band 50 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik*. Springer, Berlin, 1970.
- [Kar91] N. Karssemeijer. A stochastic model for automated detection of calcifications in digital mammograms. In *Proc. 12th Int. Conf. Inform. Processing Med. Imaging (Wye, UK)*, S. 227–238, 1991.
- [Kar93] N. Karssemeijer. Adaptive noise equalization and recognition of microcalcification clusters in mammograms. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1357–1376, 1993.
- [Kat76] J. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications, New York, 1976.
- [Kin99] N. G. Kingsbury. Image processing with complex wavelets. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 357 (1760) : 2543–2560, 1999.
- [KL98] I. Koren und A. Laine. *A discrete dyadic wavelet transform for multidimensional feature analysis*, S. 425–449. IEEE Press, 1998. In: Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing, Editor M. Akay.
- [KPSP97] J. K. Kim, M. Park, K. S. Song, und H. W. Park. Adaptive mammographic image enhancement using first derivative and local statistics. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16 (5) : 405–502, Oktober 1997.
- [LBD96] S. Liu, C. F. Babbs, und E. J. Delb. Normal mammogram analysis and recognition. Preprint, 1996.

- [LFY95] A. Laine, J. Fan, und W. Yang. Wavelets for contrast enhancement of digital mammography. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 14 (5) : 536–550, 1995.
- [Lin98] T. Lindeberg. Feature detection with automatic scale selection. *Int. J. of Computer Vision*, 30 (2) , 1998.
- [LMR94] Louis, Maaß, und Rieder. *Wavelets*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [LSFH94] A. F. Laine, S. Schuler, J. Fan, und W. Huda. Mammographic feature enhancement by multiscale analysis. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13 (4) : 725–740, Dezember 1994.
- [Mal98] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [MH92] S. Mallat und W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38: 617–643, 1992.
- [MSvD98] D. Meersman, P. Scheunders, und D. van Dyck. *Classification of microcalcifications using texture based features*. G. Elsevier Science B.V., 1998. In: Digital Mammography, Editors K. Doi and M. L. Giger.
- [MT95] M. A. Muschietti und B. Torrèsani. Pyramidal algorithms for littlewood-paley decompositions. *SIAM J. Math. Anal.*, 26 (4) : 925–943, Juli 1995.
- [Mur90] R. Murenzi. *Ondelettes multidimensionnelles et applications à l'analyse d'images*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgien, 1990.
- [MZ92] S. Mallat und S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14 (7) : 710–732, 1992.
- [Net96] T. Netsch. *A scale-space approach for the detection of clustered microcalcifications in digital mammograms*. G. Elsevier Science B.V., 1996. In: Digital Mammography, Editors K. Doi and M. L. Giger.
- [Net98] Thomas Netsch. *Automated Detection of Clustered Microcalcifications in Digital Mammograms*. PhD thesis, Universität Bremen, 1998.
- [Ohl96] A. Ohlhoff. *Anwendungen der Wavelettransformation in der Signalverarbeitung*. Dissertation, Universität Bremen, Bremen, 1996.
- [PCSW96] N. Petrick, H.-P. Chan, B. Sahiner, und D. Wei. An adaptive density-weighted contrast enhancement filter for mammographic breast mass detection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15 (1) : 59–67, Februar 1996.

- [QCKC94] Wei Quian, L. P. Clarke, Maria Kallergi, und Robert. A. Clark. Tree-structured nonlinear filters in digital mammography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13 (1) : 25–36, März 1994.
- [QCZ+95] W. Qian, L. P. Clarke, B. Zheng, M. Kallergi, und R. Clark. Computer assisted diagnosis for digital mammography. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 14 (5) : 561–569, 1995.
- [RMM+96] D. Rosen, B. Martin, M. Monheit, G. Wolff, und M. Stanton. *A Bayesian neural network to detect microcalcifications in digitized mammograms*, S. 277–282. G. Elsevier Science B.V., 1996. In: Digital Mammography, Editors K. Doi and M. L. Giger.
- [Ron98] A. Ron. Wavelets and their associated operators. In C. K. Chui und L. L. Schumaker, Hrsg., *Proc. of The 9th International Conference on Approximation Theory*, S. 1–35, 1998.
- [RS97] A. Ron und Z. Shen. Affine systems in  $L_2(\setminus^d)$ : the analysis of the analysis operator. *J. Functional Analysis*, 1997.
- [Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill Inc., Singapur, dritte Auflage, 1987.
- [Sai97] S. Saitoh. *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*. Addison Wesley, Großbritannien, 1997.
- [Sel99] I. W. Selesnik. Smooth wavelet tight frames with limited redundancy. Preprint, August 1999.
- [SFAH92] E. P. Simoncelli, W. T. Freeman, E. H. Adelson, und D. J. Heeger. Shiftable multi-scale transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38 (2) : 587–607, März 1992.
- [SH96] Robin N. Strickland und Hee Il Hahn. Wavelet transforms for detecting microcalcifications in mammogramms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15 (2) : 218–229, April 1996.
- [SRD93] L. Shen, R. M. Rangayyan, und J. E. L. Desautels. Detection and classification of mammographic calcifications. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1403–1416, 1993.
- [Teo98] A. Teolis. *Computational Signal Processing with Wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [Tor95] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. Inter Editions, Paris, 1995.
- [TYLM00] Y. Y. Tang, L. H. Yang, J. Liu, und H. Ma. *Wavelet Theory and Its Application to Pattern Recognition*. World Scientific, Singapore, 2000.

- [WDB<sup>+</sup>93] K. S. Woods, C. C. Doss, K. W. Bowyer, J. L. Solka, C. E. Priebe, und Jr. W. P. Kegelmeyer. Comparative evaluation of pattern recognition techniques for detection of microcalcifications in mammography. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 7 (6) : 1417–1436, 1993.
- [Wil97] E. Wilzoc. *Zur Funktionalanalysis der Wavelet- und Gabortransformation*. Dissertation, Erlangen-Nürnberg, 1997.
- [WK98] T. C. Wang und N. B. Karayiannis. Detection of microcalcifications in digital mammograms using wavelets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17 (4) : 498–509, August 1998.
- [Wou98] G. Van de Wouwer. *Wavelets for Multiscale Texture Analysis*. PhD thesis, Universität Antwerpen, 1998.
- [YBHE99] M. Yam, J. M. Brady, R. P. Hignam, und R. English. *Detecting Calcifications in Mammograms Using the  $h_{int}$  Representation*, S. 373–377. G. Elsevier Science B.V., 1999. In: CARS 99, Editors H.U. Lemke, M. W. Vannier and others.
- [YZC<sup>+</sup>96] H. Yoshida, W. Zhang, W. Cai, K. Doi, R. M. Nishikawa, und M. L. Giger. Optimizing wavelet transform based on supervised learning for detection of microcalcifications in digital mammograms. *ICIP*, S. 152–155, 1996.



# Symbolverzeichnis

## Räume

$A(G)$	Fourier-Algebra zu $L^1(G)$ , 51
$FF_A$	Menge der Wavelet-Familien fester Faltungsoperatoren, 102
$\widehat{G}$	Duale Gruppe, 51
$H$	Dilatationsgruppe, 3
$(H_j)_{j \in J}$	Detail-Zerlegung, 88
$\mathcal{H}_V$	Verallgemeinerter Hardy-Raum, 4
$IW_F$	Menge der integrierten Wavelets, 102
$\text{Lip}^\alpha(O)$	gleichmäßig Lipschitz auf $O$ , 79
$\text{Lip}^\alpha(x_0)$	punktweise Lipschitz in $x_0$ , 79

## Operatoren

$\sim$	Involution, 6
$C_{\psi, \chi}$	Crosskernel, 15
$D_a$	$L^2$ -normierte Dilatation, 6
$D_a$	$L^1$ -normierte Dilatation, 8
$\mathcal{F}^{\mathbb{R}^*}$	Mellin-Transformation, 98
$\widetilde{F}$	Pseudoinverse, 34
$R_\rho$	Rotation, 6
$T_b$	Translation, 6
$\mathcal{U}$	quasireguläre Darstellung, 3
$U$	$L^1$ -normierte quasireguläre Darstellung, 8
$\mathcal{WT}$	Kontinuierliche Wavelet-Transformation, 2
$WT$	$L^1$ -normierte Wavelet-Transformation, 8
$\mathcal{WT}_\psi f$	Wavelet-Koeffizient, 2

## Funktionen

$d(f)_{a, \rho}$	(Morlet-)Detail, 51, 65
$D_j, D_{j,l}$	(Morlet-)diskretes Detail, 53, 67, 88
$\Psi^j, \Psi^{j,l}$	(Morlet-)integriertes Wavelet, 53, 67, 88, 90
$s(f)_a$	(Morlet-)Skala, 51, 65

# Index

- Abbildungsunschärfe, 119
- Affine Gruppe, 6
- Affiner Frame, 35
- Angepasstes Filter, 125
  
- Brennfleckdurchmesser, 119
  
- Detail, 51
  - diskretes, 53, 88
  - Morlet, 65
  - Morlet-diskretes, 67
  
- Enhancement-Operator, 144
  - skalenweiser, 158
- Euklidische Gruppe mit Dilatation, 6
  
- lokale Rauschfilterung mit soft-threshold, 162
- lokaler Kontrast, 197
  
- Mallat-Algorithmus, 42
- Maxima-Kurve, 149
- Maxima-Skelett, 149
- Mikrokalk, 117
- Mikrokalk-Hervorhebung, 200
- Morlet-Rekonstruktion, 22
  
- parametrische Kontrastverbesserung, 168
  
- reproduzierende Eigenschaft, 9
- reproduzierender Kern, 9
- RKHS, 9
  
- Sensitivität, 120
- Signal-Rausch Energieverhältnis (SNR), 125
- Skala, 51
  - Morlet, 65
  
- Skalen-Maximum, 149
- Skalierungsfunktion, 30, 51
  - Morlet, 65
- Skalierungsgleichung, 31
- Spezifität, 120
- Spot-Hervorhebung, 171
  
- Translationskovarianter Operator, 7
  
- Wavelet, 2
  - infinitesimales, 50
  - integriertes, 53, 88
  - Morlet-infinitesimales, 65
  - Morlet-integriertes, 67, 90
  - Rekonstruktions-, 15
- Wavelet-Familie von Faltungsoperatoren, 102
- Wavelet-Frame, 35
- Wavelet-Transformation
  - $L^1$ -normierte, 8
  - diskrete (DWT), 31
  - diskrete integrierte, 155
  - diskrete Morlet-integrierte, 154
  - dyadische (DyadWT), 38
  - integrierte, 54
  - kontinuierliche (CWT), 2
  - Morlet-integrierte, 67
  - semidiskrete, 38
  
- Zulässigkeit, 2
  - gemischte, 15
  - Morlet-, 22